ВСТУП

Геометрія як наука сформувалася в Стародавній Греції в період VII—V ст. до нової ери. У цьому відіграли значну роль Фалес (625—547 р.р. до н.е.), Піфагор (580—500 р.р. до н.е.), Демокрит (467—370 р.р. до н.е.) та інші. Піфагор відкрив ірраціональні числа. Гіпократ Хіоський написав твір з геометрії, який до нас не дійшов (про нього згадується у творах інших грецьких геометрів). Гіпократ Хіоський вперше виконав квадратуру криволінійної фігури. У той час геометрія вже склалась як наука з її системою логічних висновків. Процес формування геометрії від правил вимірювання земельних ділянок до логічної системи теорем охарактеризував грецький вчений Евдем Родоський (4 ст. до н.е.): "Геометрія була відкрита єгиптянами і виникла при вимірюванні землі. Це вимірювання було їм необхідне внаслідок розлиття річки Ніл, яка постійно змивала межі. Немає нічого дивного, що ця наука, як і інші, виникла із потреб людини". Основні досягнення геометрії систематизував і виклав у логічній послідовності Евклід у праці "Початки"(330—275 р.р. до н.е.). Цей твір настільки бездоганний для свого часу, що протягом двох тисяч років він був єдиним посібником для тих, хто вивчав геометрію. Архімед із Сіракуз (III ст. до н.е.) знайшов формули для довжини кола, площі круга, для об'ємів кулі та циліндра. Аполлоній Пергейський (III ст. до н.е.) розробив теорію конічних перерізів. Назвемо прізвища видатних вчених, які у свій час здійснили важливі відкриття у геометрії: Прокл (410—485 р.р.), Дезарг (1593—1662), Декарт (1596—1650), Паскаль (1623—1662), Саккері (1667—1733), Ламберт (1728—1777), Понселе (1789—1867), Монж (1746—1818), Гаусс (1777—1855), Лобачевський (1792—1856), Больяй Й. (1802—1860), Ріман (1826—1866), Клейн (1849—1925), Келі (1821—1895), Бельтрамі (1835—1900), Гільберт (1862—1943), Пуанкаре (1854—1912), Паш (1843—1930), Погорєлов О.В. (1919), Колмогоров А.М. (1903—1987), Александров О.Д. (1912—1999).

Дослідження аксіоматики евклідової геометрії було завершено Д.Гільбертом (1899 р.). Він довів, що його система аксіом несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика. У 1826 р. М.І.Лобачевський майже одночасно з Й.Больяй відкриває неевклідові геометрії. Проблема обгрунтування теорії паралельних прямих, яка була відкрита понад 20 століть, розв'язується відкриттям неевклідових геометрій. Цим було покладено початок узагальненого погляду на геометрію, який привів до сучасного поняття абстрактного простору з численними застосуваннями як у математиці, так і в суміжних з нею областях. Приблизно в той час, коли Лобачевський починав свої дослідження про паралельні прямі і коли зароджувалася теорія поверхонь Гаусса, виникла проективна геометрія. У 70-ті рр. XIX ст. Ф.Клейн відкриває зв'язок між геометричними системами Евкліда, Лобачевського та Рімана, заснований на проективній геометрії. Клейном розвинута геометрична концепція як теорія інваріантів деякої групи перетворень. Груповий підхід у розумінні суті геометрії, висловлений Клейном у лекції "Порівняльний огляд найновіших геометричних досліджень", яка увійшла в історію науки під назвою "Ерлангенська програма"(1872 р.), дозволяє класифікувати найважливіші геометричні системи.

1. ПРОГРАМА КУРСУ "ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ"

1. "Початки"Евкліда та їх загальна характеристика. Приклади означень, постулатів (V постулат Евкліда), аксіом. Твердження Лежандра. Еквіваленти V постулату Евкліда.

2. Система аксіом О.В.Погорєлова, її загальна характеристика. Аксіоми зв'язку та їх окремі наслідки (теорема про взаємне розміщення двох прямих, двох площин та прямої і площини). Теорема про належність точок площині. Аксіоми порядку. Означення: напрямку на прямій, півпрямої, відрізка, поняття "між". Теорема про існування внутрішніх точок у відрізка. Означення кута, трикутника. Теорема Паша. Поняття "між"для променів зі спільною вершиною. Аксіоми руху. Означення конгруентності фігур. Конгруентність як відношення еквівалентності фігур. Теорема про конгруентність відрізків AB і BA, кутів (k, h) і (h, k). Теорема про існування і єдиність бісектриси кута. Означення прямого кута. Теорема про рівність усіх прямих кутів. Теорема про існування і єдиність перпендикуляра до заданої прямої у площині. Теореми — ознаки рівності трикутників. Порівняння відрізків та кутів. Операції над відрізками та кутами. Теорема про існування середини відрізка. Теорема про зовнішній кут трикутника. Теорема про порівняння сторін та кутів у трикутнику. Теорема про нерівність трикутника.

Аксіома неперервності Дедекінда. Теорема Архімеда. Теорема Кантора. Поняття кола. Теорема про перетин прямої з колом. Теорема про міру відрізка. Теорема про міру кута. Теорема про існування відрізка заданої довжини. Поняття абсолютної геометрії. Аксіома паралельності (Евкліда). Теореми — ознаки паралельності прямих. Теореми, обернені до ознак паралельності прямих. Теорема про суму внутрішніх кутів трикутника. Теорема про величину зовнішнього кута трикутника. Теореми — ознаки подібності трикутників. Теорема Піфагора. Обернена теорема Піфагора. Теорема про величину вписаного кута в коло. Універсальні теореми для трикутника. Теореми про ознаки паралелограма.

3. Система аксіом Д.Гільберта, її загальна характеристика. Аксіоми зв'язку. Аксіоми порядку. Аксіоми конгруентності. Означення кута в схемі аксіоматики Д.Гільберта. Аксіоми неперервності (Архімеда і Кантора). Аксіома паралельності (Евкліда).

4. Аксіоматика шкільного посібника "Геометрія"за редакцією О.В.Погорєлова та її загальна характеристика. Основні властивості належності точок прямій і площині та прямих площині. Перша теорема посібника "Геометрія"за редакцією О.В.Погорєлова. Основні властивості розміщення точок на прямій і на площині. Основні властивості вимірювання відрізків і кутів. Основні властивості відкладання відрізків і кутів. Основна властивість паралельних прямих. Аксіоми стереометрії.

5. Три основні проблеми системи аксіом. Означення реалізації системи аксіом. Декартова реалізація системи аксіом О.В.Погорєлова $(I - V, 17)$. Точка, пряма, відношення належності та порядку в декартовій реалізації плоскої системи аксіом $(I - V, 17)$. Поняття руху в декартовій реалізації системи аксіом $(I - V, 17)$. Теорема про те, що кожен рух пряму переводить у пряму. Доведення виконання аксіом $(I - V, 17)$ в декартовій реалізації. Теорема про несуперечливість системи аксіом $(I - V, 17)$ О.В.Погорєлова. Теорема про повноту деякої системи аксіом. Поняття ізоморфізму реалізації системи аксіом. Теорема про незалежність аксіом неперервності та паралельності евклідової геометрії. Поняття колінеації, група колінеацій. Реалізація Ф.Клейна (К).

6. Аксіома М.І.Лобачевського. Геометрія Лобачевського. Поняття граничних прямих в сукупності всіх прямих, які проходять через задану точку і не перетинають заданої прямої. Еквіваленти аксіоми Лобачевського. Поняття паралельних за Лобачевським прямих. Кут паралельності. Інтерпретація Ф.Клейна площини Лобачевського, простору Лобачевського. Інтерпретація Е.Бельтрамі. Теорема про суму внутрішніх кутів геодезійного трикутника в схемі Е.Бельтрамі. Інтерпретація А.Пуанкаре. Характеристика рухів у геометрії Лобачевського. Функція Лобачевського $\alpha = \pi(x)$, її основні властивості. Лема про дві прямі площини Лобачевського. Теорема про однозначне визначення кута паралельності. Відсутність подібності фігур у геометрії Лобачевського, існування абсолютних констант лінійних величин. Явний вигляд функції Лобачевського, формула Піфагора для прямокутного трикутника на площині Лобачевського. Полярна відповідність на площині та у просторі. Складне відношення чотирьох точок прямої та його інваріантність при колінеаціях. Властивість взаємної паралельності прямих за Лобачевським. Властивість транзитивності паралельності за Лобачевським прямих. Поняття розбіжних прямих. Теорема про існування єдиного спільного перпендикуляра для двох розбіжних прямих у площині Лобачевського. Задача про перпендикуляр з даної точки на пряму площини Лобачевського. Поняття еквідістанти, оріциклу, еквідістантної поверхні, орісфери. Інваріантні лінії відносно евклідових рухів (прямі та кола). Інваріантні лінії відносно рухів (колінеацій) площини Лобачевського (кола, еквідістанти, оріцикли). Елементарні геометрії на поверхнях евклідового простору та на поверхнях простору Лобачевського. Задача вимірювання відрізків та кутів на площині Лобачевського в інтерпретації Ф.Клейна.

7. Аксіоматика проективної геометрії, її загальна характеристика. Аксіоми зв'язку. Теорема про взаємне розміщення прямої і площини, двох площин, трьох площин. Поняття тривершинника, центра перспективи та вісі перспективи двох тривершинників. Теорема Дезарга. Поняття чотиривершинника. Гармонійні четвірки точок. Роль теореми Дезарга для геометрії проективної площини. Аксіоми порядку про відношення "слідувати". Означення відрізка на проективній прямій. Означення трикутника на проективній площині. поняття афінної прямої, афінної площини афінного простору. Аксіома неперервності. Декартова реалізація системи аксіом (I, II, III, 15) проективної геометрії, повнота та несуперечливість. Сферична геометрія Рімана. Точки та прямі площини Рімана. Упорядковані четвірки точок прямої та упорядковані четвірки прямих площини Рімана. Поняття відрізка та трикутника на площині Рімана. Конгруентність відрізків та кутів на площині Рімана. Геометрії Рімана, Лобачевського, Евкліда, афінна і проективна — як групові геометрії. Поняття найпростішої нетривіальної фігури у різних геометріях. Основні інваріанти різних геометрій. Реалізація елементарних геометрій у проективній схемі.

2. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. Основания геометрии.— М.: Наука, 1987.— 286 с.

2. Больаи Я. Аппендикс. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что apriori никогда решено быть не может, с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга.— М.—Л.: Гостехиздат, 1950.— 235 с.

3. Гильберт Д. Основания геометрии.— М.—Л.: Гостехиздат, 1948.— 491 с.

4. Глаголев Н.А. Проективная геометрия.— М.: Высш. шк., 1963.— 344 с.

5. Ефимов Н.В. Высшая геометрия.— М.: Физматгиз, 1961.— 580 с.

6. Каган В.Ф. Основания геометрии: Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. Часть I. Геометрия Лобачевского и ее предистория.— М.—Л.: Гостехиздат, 1949.— 492 с.

7. Каган В.Ф. Основания геометрии: Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. Часть II. Интерпретация геометрии Лобачевского и развития ее идей.— М.: Гостехиздат, 1956.— 344 с.

8. Клейн Ф. Неэвклидова геометрия.— М.—Л.: ОНТИ, 1935.— 241 с.

9. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. В 5-ти томах. Т.1. Сочинения по геометрии. Геометрические исследования по теории параллельных прямых. О началах геометрии.— М.-Л.: Гостехиздат, 1946.— 415 с.

10. Погорелов А.В. Основания геометрии.— М.: Наука, 1979.— 151 с.

11. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: Підр. для 10—11 кл. сер. шк.— К.: Освіта, 1995.— 128 с.

12. Смогоржевський О.С. Основи геометрії.— К.: Рад. шк., 1954.— 343 с.

13. Собчук В.С. Основи геометрії. Конспекти лекцій.— Чернівці: ЧДУ, 1999.— 63 с.

3. СИСТЕМИ АКСІОМ ГЕОМЕТРІЇ

Д.Гільберт у 1899 році опублікував систему аксіом з п'яти груп. **Аксіоми Д.Гільберта ($I-V$, 20)** описують об'єкти трьох родів — "точки", "прямі"і "площини— які знаходяться у трьох відношеннях між собою. Ці відношення виражаються словами "належати", "між"та "конгруентність".

I. Аксіоми зв'язку

I_1. Які б не були дві різні точки, існує пряма, якій належать ці точки.

I_2. Які б не були дві різні точки, існує не більше однієї прямої, якій належать ці точки.

I_3. На кожній прямій лежить щонайменше дві точки. Існує три точки, які не лежать на одній прямій.

I_4. Які б не були три точки, що не лежать на одній прямій, існує площина, якій належить кожна з цих точок. На кожній площині лежить принаймні одна точка.

I_5. Які б не були три різні точки, які не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, якій належить кожна з цих точок.

I_6. Якщо дві точки прямої належать площині, то кожна точка прямої належить цій площині.

I_7. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають ще одну спільну точку.

I_8. Існує чотири точки, які не лежать в одній площині.

II. Аксіоми порядку

II_1. Якщо точка B лежить між точками A і C прямої (A, B, C — різні точки прямої), то B лежить також між точками C і A.

II_2. Які б не були точки A і C прямої, то на цій прямій існує принаймні одна точка B така, що C лежить між A і B.

II_3. Серед довільних трьох точок прямої існує не більше однієї, яка лежить між двома іншими.

II_4. Нехай A, B і C три точки, які не лежать на одній прямій і (a) — пряма площини (ABC), яка не містить точок A, B і C. Якщо пряма (a) містить точку відрізка AB, то вона містить точку відрізка AC або відрізка BC.

III. Аксіоми конгруентності

III_1. Які б не були дві точки A і B прямої (a) і A' — точка на прямій (a) або на іншій прямій (a'), то існує єдина точка B' прямої (a') по задану відносно точки A' сторону така, що відрізок AB конгруентний відрізку $A'B'$. Для кожного відрізка AB цей відрізок конгруентний відрізку BA.

III_2. Якщо два відрізки конгруентні третьому, то вони конгруентні між собою.

III_3. Якщо AB і BC — два відрізки прямої (a), які не мають спільних внутрішніх точок, і $A'B'$ та $B'C'$ — два відрізки тієї ж, або іншої прямої (a'), які теж не мають спільних внутрішніх точок. Тоді якщо AB конгруентний $A'B'$ і BC конгруентний $B'C'$, то AC конгруентний $A'C'$.

III_4. Кожний кут можна однозначно відкласти у заданій площині по задану сторону при заданому промені.

III_5. Нехай A, B і C — три точки, які не лежать на одній прямій, і A', B' та C' — три точки, які теж не лежать на одній прямій. Якщо AB конгруентний $A'B'$, AC конгруентний $A'C'$ і кут BAC конгруентний куту $B'A'C'$, то кут ABC конгруентний куту $A'B'C'$ і кут ACB конгруентний куту $A'C'B'$.

IV. Аксіоми неперервності

IV_1 (*Аксіома Архімеда*). Нехай AB і CD — довільні відрізки. На прямій (AB) існує скінченна кількість точок A_1, A_2,..., A_n таких, що A_1 лежить між A і A_2, точка A_2 лежить між A_1 і A_3 і т.д., причому відрізки AA_1, A_1A_2, $A_{n-1}A_n$ конгруентні відрізку CD і B лежить між A і A_n.

IV_2 (*Аксіома Кантора*). Якщо на довільній прямій (a) задана нескінченна послідовність відрізків A_1B_1, A_2B_2,... таких, що кожен наступний належить попередньому. Якщо яким би не був наперед заданий відрізок, знайдеться номер n для якого відрізок A_nB_n менший заданого відрізка, то на прямій (a) існує точка, яка належить усім відрізкам A_1B_1, A_2B_2,... .

V. Аксіома паралельності

Нехай (a) — пряма і точка A, яка не лежить на прямій (a). Тоді у площині, яка визначається точкою A і прямою (a), існує не більше однієї прямої, яка проходить через точку A і не перетинає пряму (a).

Погорєлов О.В. — автор системи аксіом ($I - V$, **22**), еквівалентної системі аксіом Д.Гільберта, яка між точками, прямими і площинами описує відношення "належати", "передувати"та "руху". Аксіоми зв'язку (група I) у системах аксіом Д.Гільберта і О.В.Погорєлова однакові.

II. Аксіоми порядку

II_1. Якщо точка A передує точці B ($A < B$) в одному напрямку на прямій (AB), то B передує A ($B < A$) на цій прямій у протилежному напрямку.

II_2. В одному з двох напрямків $A < B$ виключає $B < A$.

II_3. Якщо в одному з двох напрямків $A < B$ і $B < C$, то $A < C$.

II_4. В одному з двох напрямків для кожної точки B прямої знайдуться точки A і C цієї прямої такі, що $A < B < C$.

II_5. Пряма (a) площини (α) розбиває її на дві частини (півплощини) так, що якщо A та B — точки однієї півплощини, то відрізок AB не перетинається з прямою (a), якщо ж A та B — належать різним півплощинам, то відрізок AB перетинає пряму (a).

III. Аксіоми руху

III_1. Кожен рух зберігає відношення належності.

III_2. Кожен рух зберігає відношення порядку на прямій.

III_3. Рухи утворюють групу.

III_4. Якщо при деякому русі півпряма h з вершиною O залишається нерухомою і вершина O переходить у себе, то кожна точка півпрямої h переходить сама в себе.

III_5. Для кожної пари точок A і B існує рух H такий, що $H(A) = B$, $H(B) = A$.

III_6. Для кожної пари променів h і k зі спільною вершиною існує рух H такий, що $H(h) = k$, $H(k) = h$.

III_7. Нехай (α) і (β) — довільні площини, $(a) \subset (\alpha)$ і $(b) \subset (\beta)$ — довільні прямі у них та $A \in (a)$, $B \in (b)$ — довільні точки на цих прямих. Існує єдиний рух, який переводить півпряму з вершиною A прямої (a) у задану півпряму з вершиною B прямої (b), задану півплощину площини (α) відносно прямої (a) у задану півплощину площини (β) відносно прямої (b).

IV. Аксіома неперервності

(про розріз Дедекінда)

Якщо точки прямої розбити на два непорожні класи так, щоб в одному з двох напрямків на прямій кожна точка першого класу передувала кожній точці другого класу, то або у першому класі існує точка, якій передують усі точки цього першого класу, або у другому класі існує точка, яка передує усім точкам другого класу.

V. Аксіома паралельності

Нехай (a) — пряма і точка A, яка не лежить на прямій (a). Тоді у площині, яка визначається точкою A і прямою (a) існує не більше однієї прямої, яка проходить через точку A і не перетинає пряму (a).

Аксіоматика шкільного посібника "Геометрія" за редакцією О.В.Погорєлова ($I - V$, **13**).

I. Основні властивості належності

точок і прямих на площині

I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

I_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

II. Основні властивості розміщення

точок на прямій і на площині

II_1. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

III. Основні властивості вимірювання

відрізків і кутів

III_1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

III_2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює $180°$. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

IV. Основні властивості відкладання

відрізків і кутів

IV_1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.

IV_2. Від будь-якої півпрямої у заданій півплощині можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою $180°$, і тільки один.

IV_3. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

V. Основна властивість паралельних прямих

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше ніж одну пряму, паралельну даній.

Аксіоми стереометрії

C_1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які їй не належать.

C_2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

C_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж лише одну.

Аксіоми проективної геометрії $(I - III$**, 15)** для точок, прямих і площин описують відношення "належати"і "слідувати".

I. Аксіоми зв'язку

I_1. Які б не були точки A і B, існує пряма, яка проходить через точки A і B.

I_2. Які б не були різні точки A і B, існує не більше однієї прямої, яка проходить через точки A і B.

I_3. На кожній прямій існує не менше трьох точок. Існує три точки, які не лежать на одній прямій.

I_4. Через три точки A, B і C проходить площина. На кожній площині існує принаймні одна точка.

I_5. Через три різні точки, які не лежать на одній прямій, проходить не більше однієї площини.

I_6. Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки цієї прямої належать площині.

I_7. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають принаймні ще одну спільну точку.

I_8. Існує чотири точки, які не лежать в одній площині.

I_9. Кожні дві прямі, які лежать в одній площині, мають спільну точку.

II. Аксіоми порядку

II_1. Слідування трійки ABC точок прямої в одному напрямку виключає слідування цієї трійки у протилежному напрямку.

II_2. Якщо трійка ABC слідує в одному напрямку прямої, то трійки BAC і ACB слідують у протилежному напрямку.

II_3. Якщо трійки ABC і CDA слідують в одному напрямку прямої, то трійка BCD слідує у тому ж напрямку.

II_4. Для кожної пари точок A і B знайдуться точки C і D такі, що трійки ACB і ADB слідують у протилежних напрямках.

II_5. Упорядкованість точок прямої зберігається при проектуванні.

III. Аксіома неперервності

Для кожної афінної прямої проективної прямої вірне твердження аксіоми Дедекінда.

Аксіома Лобачевського

Існують така пряма (a) і точка A поза нею, що через точку A проходить не менше двох прямих, які не перетинають пряму (a) і лежать з нею в одній площині.

4. ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Програма курсу "Основи геометрії"орієнтована, як на основну, на систему аксіом О.В.Погорєлова ($I - V$, 22). Тому задачі та вправи наступного списку за номерами 1—75, 91, 92 і 94—97 стосуються саме цієї системи аксіом. Задачі N 76–84 відносяться до геометрії М.І.Лобачевського. Задачі N 85—90, 93, 98 відносяться до застосування аксіоматики проективної геометрії ($I - III$, 15). Задачі N 100–120 є наслідками системи аксіом шкільного посібника "Геометрія"під редакцією О.В.Погорєлова ($I - V$, 13). Оскільки система аксіом ($I - V$, 22) є іншою редакцією аксіом ($I - V$, 20) Д.Гільберта, то корисно знайти розв'язання задач N 1—75, 91, 92, 94—97, опираючись на систему аксіом ($I - V$, 20).

Простір — це множина точок, прямих і площин. Точки позначаємо великими латинськими літерами, наприклад, A, B, C, M, N, K, X і т.п.; прямі — малими латинськими літерами, наприклад, $(a), (b), (c), ...$ Мала літера (a) в круглих дужках читається "пряма a". Площини позначаємо малими літерами грецького алфавіту, наприклад, $(\alpha), (\beta)$ тощо, або трьома точками, які лежать в площині, наприклад, $(ABC), (KLM)$. Позначення $A < B$ означає, що на прямій (AB) точка A передує точці B. Термін точка A "між"точками A і C для точок A, B і C прямої в системі аксіом ($I - V$, 22) означає, що або $A < B < C$, або $C < B < A$. Буквою d позначено величину (міру) прямого кута. За означенням відрізка, кінці відрізка йому не належать. За означенням кута (h, l), промені h і l не входять до фігури кута. За означенням променя, його вершина не входить до фігури променя. Рухом у просторі називається така взаємно однозначна відповідність, визначена на множині точок, на множині прямих і на множині площин, яка множину точок відображає на множину точок, множину прямих — на множину прямих і множину площин — на множину площин, та задовольняє аксіомам групи III системи аксіом ($I - V$, 22).

1. Довести, що дві прямі мають не більше однієї спільної точки.

2. Довести, що дві площини або не мають спільних точок, або мають спільну пряму.

3. Довести, що пряма з площиною має не більше однієї спільної точки.

4. Довести, що через точку поза прямою можна провести єдину площину.

5. Довести, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести єдину площину.

6. Довести, що кожна площина містить принаймні три точки які не лежать на одній прямій.

7. Довести, що серед трьох різних точок прямої лише одна лежить між двома іншими.

8. Довести, що кожен відрізок містить принаймні одну точку.

9. Сформулювати і довести твердження Паша.

10. Сформулювати і довести твердження Лежандра.

11. Довести, що серед трьох променів зі спільною вершиною, які лежать в одній півплощині лише один лежить між двома іншими.

12. Довести, що відношення конгруентності на множині фігур є відношенням еквівалентності.

13. Довести, що відрізки AB і BA конгруентні.

14. Обгрунтувати однозначність побудови відрізка, конгруентного заданому.

15. Обгрунтувати однозначність побудови кута, конгруентного заданому.

16. Довести, що якщо $(h,k) = (h',k')$, то $(h,\bar{k}) = (h',\bar{k}')$.

17. Довести, що вертикальні кути рівні (конгруентні).

18. Довести, що прямий кут існує.

19. Довести, що всі прямі кути рівні (конгруентні).

20. Довести, що через кожну точку площини (α) можна провести єдиний перпендикуляр до прямої, яка лежить у площині (α).

21. Сформулюйте і доведіть першу ознаку рівності трикутників.

22. Доведіть, що у рівнобедреного трикутника кути при основі рівні.

23. Сформулюйте і доведіть другу ознаку рівності трикутників.

24. Сформулюйте і доведіть третю ознаку рівності трикутників.

25. Якщо $AB > CD$, то $CD < AB$. Довести це.

26. Довести, що кожен відрізок має єдину середину.

27. Довести існування та єдиність бісектриси кута.

28. Сформулюйте і доведіть теорему про зовнішній кут трикутника.

29. Сформулюйте теорему про існування паралельних прямих. Доведіть її.

30. Доведіть, що у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.

31. Доведіть, що у трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона.

32. Доведіть, що у довільного трикутника кожна його сторона менша суми або більша різниці двох його інших сторін.

33. Довести, що пряма, яка містить внутрішню точку круга K і лежить у площині круга K, перетинає межу круга K (коло C) у двох точках.

34. Сформулюйте теореми про міру відрізка та про міру кута.

35. Доведіть, що яке б не було дійсне число $\alpha > 0$, то існує відрізок AB такий, що його міра дорівнює α.

36. Сформулюйте і доведіть першу ознаку паралельності прямих.

37. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до першої ознаки паралельності прямих.

38. Сформулюйте і доведіть другу ознаку паралельності прямих.

39. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до другої ознаки паралельності прямих.

40. Сформулюйте і доведіть третю ознаку паралельності прямих.

41. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до третьої ознаки паралельності прямих.

42. Сформулюйте і доведіть теорему про суму внутрішніх кутів довільного трикутника.

43. Сформулюйте і доведіть першу ознаку подібності трикутників.

44. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.

45. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до теореми Піфагора.

46. Сформулюйте і доведіть теорему про величину (міру) зовнішнього кута трикутника.

47. Знайти міру кута з вершиною у точці A, яка є внутрішньою точкою круга K.

48. Знайти міру кута з вершиною у точці A, яка є зовнішньою точкою круга K, а сторони кута містять внутрішні точки круга K.

49. Знайти міру кута з вершиною у точці, яка є зовнішньою для круга K, якщо одна сторона кута — дотична, а інша — січна круга K.

50. Знайти міру кута з вершиною на колі, якщо одна сторона кута є дотичною, а інша — хордою кола.

51. Сформулюйте і доведіть теорему про міру вписаного у коло кута.

52. Напишіть формулу зв'язку градусної і радіанної міри кута та дайте її обгрунтування.

53. Сформулюйте і доведіть теорему синусів (узагальнену теорему синусів).

54. Сформулюйте і доведіть теорему косинусів.

55. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.

56. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності двох площин.

57. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.

58. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.

59.Чи існує чотирикутна піраміда, у якої дві протилежні бічні грані перпендикулярні основі піраміди?

60. Довести, що у декартовій реалізації кожен рух пряму переводить у пряму.

61. Доведіть незалежність аксіоми Дедекінда у системі аксіом О.В.Погорєлова ($I - V$, 22).

62. Доведіть незалежність аксіоми паралельності у системі аксіом О.В.Погорєлова ($I - V$, 22).

63. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника претинаються, то його вершини лежать в одній площині.

64. Довести, що середини сторін просторового чотирикутника лежать в одній площині.

65. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму (a), яка паралельна діагоналі (BD). Довести. що прямі (a) і (CD) перетинаються.

66. Довести, що через дві мимобіжні прямі можна провести паралельні площини.

67. Прямі (AB) і (CD) не лежать в одній площині. Довести, що прямі (AC) і (BD) не лежать в одній площині.

68. Довести, що діагоналі трапеції перетинаються.

69. Довести, що дві медіани довільного трикутника перетинаються.

70. Довести, що дві бісектриси довільного трикутника перетинаються.

71. Довести, що всі прямі, які містять висоти довільного трикутника перетинаються.

72. Довести, що точка перетину діагоналей довільної трапеції, середини основ та точка перетину прямих, які містять бічні сторони трапеції, лежать на одній прямій.

73. Довести, що точка перетину діагоналей трапеції не належить середній лінії трапеції.

74. Сформулювати і довести теорему про чотирикутник, описаний навколо даного кола.

75. Сформулювати і довести теорему про існування описаного кола навколо опуклого чотирикутника.

76. Побудуйте трапецію на площині Лобачевського в інтерпретації Ф.Клейна.

77. Побудуйте паралелограм на площині Лобачевського в інтерпретації Ф.Клейна.

78. Побудуйте трапецію, паралелограм, трикутник на площині Лобачевського в інтерпретації А.Пуанкаре.

79. Доведіть, що на площині Лобачевського не існує прямокутних трапецій.

80. Вказати на міру відрізка прямої у площині Лобачевського.

81. За яких умов перпендикулярність прямих у розумінні Лобачевського збігається з перпендикулярністю прямих за Евклідом?

82. Знайти віддаль від точки A до прямої (a) на площині Лобачевського, якщо кут паралельності при точці A відносно прямої (a) дорівнює $\dfrac{\pi}{3}$.

83. Довести, що елементарна геометрія еквідістантної поверхні є геометрією Лобачевського.

84. Довести, що елементарна геометрія орісфери є геометрією Евкліда.

85. Доведіть, що у проективному просторі різні пряма і площина перетинаються.

86. Довести, що ангармонійне відношення чотирьох точок прямої є інваріантом проективного перетворення.

87. Сформулюйте теорему Дезарга та вкажіть на роль твердження Дезарга у проективній планіметрії.

88. Сформулюйте двоїсте твердження до аксіоми I_2 проективної геометрії.

89. Опишіть реалізацію Рімана проективної площини.

90. Побудуйте середину заданого вірізка на проективній прямій.

91. Побудуйте спільний перпендикуляр для двох розбіжних прямих площини Лобачевського.

92. Як вводиться міра кута на площині Лобачевського?

93. Доведіть, що довільні три різні площини проективного простору мають спільну точку.

94. Опустіть перпендикуляр з даної точки на дану пряму у площині Лобачевського.

95. Чому у геометрії Лобачевського відсутня подібність фігур?

96. Як довести транзитивність відношення паралельності для прямих площини Лобачевського?

97. Як довести взаємність відношення паралельності прямих на площині Лобачевського?

98. Сформулюйте принцип двоїстості у проективній стереометрії.

99. Чому на площині Рімана пряма не розбиває її на дві півплощини?

100. Сформулюйте стереометричні аксіоми (C_1, C_2, C_3) системи аксіом О.В.Погорєлова у посібнику з геометрії для середньої школи та їх найпростіші наслідки.

101. Дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать на одній прямій. Пряма (AB) перетинає відрізок CD, а пряма (CD) перетинає відрізок AB. Довести, що відрізки AB і CD перетинаються.

102. Дано трикутник ABC. На стороні AC візьмемо точку B_1, а на стороні BC — точку A_1. Довести, що відрізки AA_1 і BB_1 перетинаються.

103. Відрізки AB і CD не лежать на одній прямій і перетинаються у точці E. Довести, що відрізок AC не перетинає пряму (BD).

104. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій.

105. Доведіть, що коли промінь, який виходить з вершини кута, перетинає відрізок AB з кінцями на сторонах кута, то він перетинає будь-який інший відрізок з кінцями на сторонах цього кута.

106. Доведіть, що якщо у трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

107. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при його основі, рівні.

108. Доведіть рівність трикутників за кутом, бісектрисою цього кута і стороною, прилеглою до нього.

109. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

110. Доведіть рівність трикутників за медіаною і кутами, на які вона розбиває кут трикутника.

111. Дано дві різні прямі, які перетинаються у точці A. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані прямі й не проходять через точку A, лежать в одній площині.

112. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку поза прямою, лежать в одній площині.

113. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.

114. Прямі (a) і (b) не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму (c) паралельно прямим (a) і (b)?

115. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній з двох даних площин, які перетинаються.

116. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.

117. Через середину відрізка проведено площину. Доведіть, що кінці відрізка однаково віддалені від цієї площини.

118. Доведіть, що через точку, яка не лежить у даній площині, не можна провести більш ніж одну пряму, перпендикулярну до площини.

119. Дано пряму (a) і площину (α). Проведіть через пряму (a) площину, перпендикулярну до площини (α).

120. Дано пряму (a) і площину (α). Доведіть, що всі прямі, які перпендикулярні до площини (α) і перетинають пряму (a), лежать в одній площині, перпендикулярній до площини (α).

5. ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Радимо читачеві не поспішати знайомитися з вказівками до розв'язування задач, а знайти свої способи розв'язування. Це приведе до глибшого засвоєння програми курсу основ геометрії, чіткішого розуміння основних понять геометрії з її різними схемами означень та систем аксіом, які описують відношення між основними фігурами простору, в якому реалізується та чи інша геометрична система. Більшість задач з запропонованого списку досить прості і вимагають для розв'язання знання лише основних означень та аксіом відповідної системи. Задачі з неевклідових геометрій пропонуємо розв'язувати в схемах відомих стандартних реалізацій відповідної системи аксіом. Геометрія Лобачевського, наприклад, зручно інтерпретується в реалізацях Ф.Клейна, А.Пуанкаре, Е.Бельтрамі. Шукайте способи розв'язування задач геометрії Лобачевського у цих різних реалізацях і обирайте кращий, на Ваш погляд, з них. Автори будуть вдячні за зауваження, які спрямовані на покращення, можливо спрощення, пропонованих вказівок до розв'язування задач.

1. Доведення варто провести від супротивного. Тоді висновок безпосередньо випливає з аксіоми I_2.

2. Нехай площини (α) і (β) мають спільну точку K. Згідно з аксіомою I_7, вони мають ще хоча б одну спільну точку M. Пряма, що проходить через точки K і M, належить до (α), і до (β) (аксіома I_6), тобто вона є спільною для (α) і (β).

3. Для отримання потрібного висновку досить використати аксіому I_6.

4. Нехай (a) — дана пряма, A — точка поза нею. Виберемо на прямій (a) точки B і C (аксіома I_3). Існує площина (α), яка проходить через точки A, B і C (аксіома I_4). Згідно з аксіомою I_6, пряма (a) буде лежати в площині (α). Досить довести, що така площина єдина. Це дійсно так, оскільки, за аксіомою I_5, площина, яка визначається трьома точками A, B, C, є єдиною.

5. Нехай (a) і (b) — дані прямі, які перетинаються в точці A. Згідно з аксіомою I_3, на прямих (a) і (b) є, відповідно, точки K і M, відмінні від C. Точки A, K, M не лежать на одній прямій, тому існує площина, яка проходить через них. Ця площина проходитиме через прямі (a) і (b). Єдиність такої площини випливає з аксіоми I_5.

6. Нехай (α) — задана площина. На ній можна вибрати деяку точку A (аксіома I_4). Згідно з аксіомою I_8, існують чотири точки B, C, D, K, які не лежать в одній площині. Тоді хоча б одна з них, наприклад B, не лежить в площині (α). Серед трьох площин $(ABC), (ABD), (ABK)$ є хоча б дві (β_1) і (β_2) різні, інакше точки B, C, D, K лежали би в одній площині. Оскільки точка B належить площинам (β_1) і (β_2) та не належить площині (α), то прямі (a_1) і (a_2) перетину площин (β_1) і (β_2) з площиною (α) різні (задача 4). На кожній з прямих (a_1) і (a_2), крім A, лежать точки X і Y, які відмінні від A (аксіома I_3). Три точки A, X, Y лежать в площині (α), але не лежать на одній прямій, що і вимагалося.

7. Нехай (a) — задана пряма, A, B, C — задані точки на прямій (a). Тоді в одному з двох напрямків на прямій (a) маємо, що $A < C$. Якщо B не лежить між A і C, то або $B < A$, або $C < B$. Але в першому випадку A лежить між B і C, а в другому — точка C лежить між A і B, що і вимагалося.

8. Нехай A, B — кінці заданого відрізка. Згідно з аксіомою I_3, поза прямою (AB) існує деяка точка C. Візьмемо на прямій (AC) точку D так, щоб C лежала між A і D (це можна зробити, враховуючи аксіому порядку II_4). На відрізку BD візьмемо точку E таку, щоб B лежала між D і E. Тоді пряма (CE) розбиває площину на дві півплощини (аксіома II_5). Точки B і D знаходяться в одній півплощині відносно прямої (CE), бо відрізок BD не перетинає цю пряму; а точки A і D лежать в різних півплощинах, бо відрізок AD перетинає пряму (CE) в точці C. Звідси (користуючись аксіомою порядку II_5) маємо, що точки A і B — в різних півплощинах відносно прямої (CE). Отже, точка F перетину прямої (CE) з відрізком AB і є точкою відрізка AB.

9. Теорема Паша. *Якщо пряма (a) лежить у площині трикутника ABC, не містить жодної вершини цього трикутника і має спільну точку, наприклад, зі стороною AB, то вона має спільну точку зі стороною AC або зі стороною BC.*

Справді, якщо M — спільна точка прямої (a) зі стороною AB трикутника ABC, то точки A і B належать різним півплощинам, на які пряма (a) розбиває площину трикутника ABC. Тоді або точки A і C, або точки B і C належать різним півплощинам трикутника ABC відносно прямої (a). Згідно з аксіомою II_5, пряма (a) перетинає або відрізок AC, або відрізок BC.

10. Теорема Лежандра. *У довільного трикутника сума його внутрішніх кутів не більша двох прямих кутів.*

Лема 1. *У довільного трикутника сума його двох внутрішніх кутів менша двох прямих.*

Дійсно, нехай α і β — величини двох внутрішніх кутів трикутника, а γ — зовнішній кут для кута β. Тоді $\beta + \gamma = 2d$ (d — величина прямого кута). Але $\gamma > \alpha$ за теоремою про зовнішній кут трикутника (задача 28). Отже, $\alpha + \beta > 2d$.

Лема 2. *Для довільного трикутника існує такий трикутник, у якого сума внутрішніх кутів така ж, як і у заданого, але один з внутрішніх кутів не більше половини наперед заданого внутрішнього кута даного трикутника.*

Розглянемо $\triangle ABC$, $\angle BAC = \alpha$, $BM = MC$, $AM = MD$. Трикутник ADC — той, про існування якого стверджує лема 2. Нехай у трикутнику сума його внутрішніх кутів $\alpha+\beta+\gamma = 2d + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді за лемою 2, застосувавши її n разів, отримаємо трикутник з внутрішнім кутом $\dfrac{\alpha}{2^n}$. Знайдеться таке n, що $\dfrac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$. Отже, сума двох інших кутів більша $2d$, а це суперечить лемі 1.

11. Нехай h, k, l — три промені, які мають спільну вершину O і лежать в одній півплощині, котра визначається, наприклад, променем h і його доповненням $\bar{h}$. Візьмемо три точки A на

$\bar{h}$, B на h та C на k. На відрзку AC виберемо точку D наступним чином: якщо промінь l не перетинає AC, то D — довільна точка відрізка AC; якщо ж промінь l перетинає відрізок AC в точці E, то за D візьмемо довільну точку відрізка AE.

Легко перевірити (зробіть це самостійно), що промені k і l перетинають BD в точках K і L, відповідно. При цьому, якщо L між B і K, то промінь l між променями k і h, а якщо K між B та L, то k між променями h і l, що потрібно було довести.

12. Дві фігури називаються конгруентними, якщо існує рух, який переводить одну фігуру в іншу. Вдношення конгруентності є відношенням еквівалентності, оскільки воно рефлексивне (кожна фігура F конгруентна сама собі), симетричне (з того, що фігура F_1 конгруентна фігурі F_2 випливає, що F_2 конгруентна F_1) та транзитивне (з конгруентності фігур F_1 і F_2 та F_2 і F_3 випливає конгруентність фігур F_1 і F_3).

13. Конгруентність відрізків безпосередньо випливає з аксіоми руху III_5.

14. Нехай AB — даний відрізок, h — деякий промінь з початком в точці O. Існування точки D на промені h такої, що $OD = AB$ випливає з аксіоми руху III_7. Доведемо єдиність. Для цього припустимо, що існують дві різні точки D_1 та D_2 на промені h так, що $AB = OD_1$ та $AB = OD_2$. За аксіомою III_2, відрізки OD_1 та OD_2 конгруентні, звідки маємо, що точки D_1 та D_2 співпадають, що суперечить припущенню. Отже, точка D існує та єдина.

15. Нехай (h, k) — заданий кут, l — промінь, який разом з своїм доповненням $\bar{l}$ обмежує півплощину (α). Те, що існує такий промінь m в півплощині (α), для якого $(h, k) = (l, m)$, випливає з аксіоми руху III_7 (поясніть чому). Доведемо, що такий кут єдиний. Для цього припустимо, що існує два такі промені m_1 і m_2. Оскільки $(l, m_1) = (l, m_2)$, то існує деякий рух H такий, що $H(l) = l$, $H(m_1) = m_2$. Цей рух відображає півплощину (α) на себе. Враховуючи аксіому руху III_4, цей рух H є тотожним на l та його доповненні $\bar{l}$. Тоді можна довести (зробіть це самостійно), що H є тотожним на (α). Зокрема, $H(m_1) = m_2$, звідки маємо, що $m_1 \equiv m_2$. Отже, в півплощині (α) існує єдиний промінь m такий, що кути (l, m) та (h, k) конгруентні.

16. Оскільки $(h, k) = (h', k')$, то існує рух H такий, що $H(h') = h$ та $H(k') = k$. Враховуючи аксіоми руху III_1 і III_2, отримуємо, що $H(\bar{k}') = \bar{k}$, де $\bar{k}'$ — промінь, доповняльний до k', $\bar{k}$ — промінь, доповняльний до k. А тому $(h, \bar{k}) = (h', \bar{k}')$.

17. Нехай (h, k) — деякий кут, тоді $(\bar{h}, \bar{k})$ — вертикальний до нього. Згідно з аксіомою руху III_6, існує рух S такий, що $S(\bar{k}) = h$, $S(h) = \bar{k}$. Тоді, в силу аксіом руху III_1 і III_2, отримаємо, що $S(k) = \bar{h}$, $S(\bar{h}) = k$. Звідси маємо, що $(h, \bar{k}) = (\bar{h}, k)$ та $(h, k) = (\bar{h}, \bar{k})$.

18. Прямим назвають кут, що дорівнює суміжному. Щоб довести існування прямого кута, розглянемо деяку площину (α), пряму (a) на ній і точку A на прямій (a). Нехай тоді (α') і (α'')

— дві півплощини, визначені прямою (a) і h — одна з півпрямих прямої (a), на які розбиває її точка A. Згідно з аксіомою руху III_7, існує такий рух H, що $H(\alpha') = (\alpha'')$, $H(h) = h$, $H(A) = A$. За аксіомою III_4, H — тотожний на (a). Нехай B' — деяка точка півплощини (α'). Сполучимо її з точкою $B'' = H(B')$ півплощини (α'') прямою (b). Нехай C — точка перетину прямих (a) і (b). Точка C розбиває пряму (a) на дві півпрямі a' і a'', а пряму (b) на півпрямі b' і b''. Очевидно, що $H(a') = a'$, $H(b') = b''$. Тому кут (a', b') дорівнює суміжному (a', b''), тобто прямі кути існують.

19. Нехай (h, k) і (h', k') — прямі кути. Доведемо, що вони рівні. Нехай (α) — площина кута (h, k), (α') — та її півплощина, визначена променем h і його продовженням $\bar{h}$, в якій лежить промінь k. За аксіомою руху III_7, існує рух H, який h' переводить в h, а промінь k' в промінь k'', розміщений в півплощині (α').

Позначимо також через S рух, який переводить h в його доповнення $\bar{h}$, а промінь k в себе. Це можна зробити, оскільки (h, k) — прямий, тому $(h, k) = (\bar{h}, k)$. Рух S переводить тоді промінь k'' в деякий промінь k'''. Кути (k'', h) та (k''', h) рівні як кути, що отримуються рухом рівних кутів. Використовуючи однозначність побудови кута, рівного даному (задача 15), маємо, що k'' співпадає з k'''. Оскільки півплощини, що визначаються променем k і його доповненням, при дії руху S переставляються, то співпадання k'' і k''' можливо тоді і тільки тоді, коли k'' збігається з k. Але це означає, що $(h, k) = (h, k'')$, і, отже, $(h, k) = (h', k')$, що і вимагалося.

20. Нехай (a) — деяка пряма в площині (α); B — деяка точка площини (α). Доведемо, що через точку B можна провести єдиний перпендикуляр до прямої (a). Якщо точка B належить прямій (a), то дане твердження випливає із рівності всіх прямих кутів (задача 19). Нехай B не лежить на прямій (a). Тоді існує рух H, який тотожний на прямій (a) і переставляє півплощини площини (α), визначені прямою (a). Пряма, що з'єднує B і $H(B)$, перпендикулярна до (a) (задача 18). Припустимо, що існують дві прямі (b_1) і (b_2), які проходять через точку B і перпендикулярні до (a). Рух H переводить кожну з цих прямих (b_1) і (b_2) в себе. Звідси випливає, що точка $H(B)$ є спільною для цих прямих. А це суперечить аксіомі зв'язку I_2, що і доводить єдиність побудови перпендикуляра до прямої через довільну точку площини.

21. Перша ознака рівності трикутників. Якщо у трикутників ABC та $A'B'C'$: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ та $\angle A = \angle A'$, то вони рівні (конгруентні).

Доведемо це твердження. Оскільки $\angle A = \angle A'$, то існує рух H, який переводить точку A' в точку A, півпряму $[A'B')$ у півпряму $[AB)$, півпряму $[A'C')$ у півпряму $[AC)$. Враховуючи однозначність побудови відрізка, конгруентного даному (задача 14), рух H переводить точки B' в B та C' в C, що і доводить рівність трикутників ABC та $A'B'C'$.

22. Трикутник наэивається рівнобедреним, якщо у нього дві сторони рівні. Рівність кутів при основі такого трикутника безпосередньо випливає із задачі 21 (доведіть самостійно).

23. Друга ознака рівності трикутників. Якщо у трикутників ABC і $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, то вони рівні (конгруентні).

Доведемо це твердження. Існує рух, який переводить точку A в точку A', півпряму $[AB)$ в півпряму $[A'B')$, півпряму $[AC)$ в півпряму $[A'C')$. Враховуючи однозначність побудови відрізка, рівного даному (задача 14), маємо, що при такому русі точка B переходить в B'. Далі, враховуючи однозначність побудови кута, рівного даному (задача 15), півпряма $[BC)$ переходить в $[B'C')$, оскільки $\angle B = \angle B'$. Звідси випливає, що C переходить в точку C', що і доводить рівність трикутників ABC і $A'B'C'$.

24. Третя ознака рівності трикутників. Якщо у трикутників ABC та $A'B'C'$: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, то вони рівні (конгруентні).

Доведемо це твердження. Існує рух, який переводить півпряму $[AB)$ в $[A'B')$ і суміщає площини трикутників так, що точка C' і точка C'', в яку переходить при русі C, розміщені в різних півплощинах, визначених прямою $(A'B')$. Згідно із задачею 14, такий рух переводить точку B в B'.

Трикутники $C'A'C''$, $C'B'C''$ — рівнобедрені і $C'C''$ є їх спільною основою. Нехай точка D — перетин відрізка $C'C''$ з прямою (AB). Оскільки півпрямі $[C'A')$, $[C'D)$, $[C'B')$ та $[C''A)$, $[C''D)$, $[C''B')$ знаходяться в однаковому порядку (він визначається порядком точок A', D, B'), а кути при основі рівнобедреного трикутника рівні (задаача 22), то легко довести, що кут між півпрямими $[C'A')$ і $[C'B')$ дорівнює куту між півпрямими $[C''A')$ та $[C''B')$ (доведіть). Звідси, кут C трикутника ABC дорівнює куту C' трикутника $A'B'C'$. А тому, за першою ознакою рівності трикутників (задача 21), трикутники ABC та $A'B'C'$ конгруентні (рівні), що і вимагалося.

25. Нехай AB і CD — нерівні відрізки і $AB > CD$. Переведемо деяким рухом півпряму $[AB)$ в півпряму $[CD)$. При цьому точка B перейде в B', а D' в D. Отже, точки A, B, D' та C, B', D знаходяться в однаковому відношенні порядку (аксіома руху III_2). З того, що D' знаходиться між A та B, випливає, що D знаходиться між C та B', тобто з $AB > CD$ випливає, що $CD < AB$.

26. Нехай AB — деякий відрізок, а точка O — його середина, тобто що $AO = OB$. Доведемо спочатку існування між точками A і B такої точки C, що $AO = OB$. Пряма (AB) розбиває деяку площину, в якій вона лежить, на дві півплощини (α') і (α'').

Відкладемо в півплощинах (α') і (α'') від півпрямих $[AB)$ і $[BA)$ відповідно рівні кути і візьмемо на сторонах цих кутів точки C і D так, щоб $AC = BD$. Відрізок CD перетинає пряму (AB) в точці O. За першою ознакою рівності трикутників (задача 21), трикутники ACB і BDA рівні. Звідси випливає, що $\angle CBA = \angle DAB$. Звідси маємо рівність трикутників CBD і DAC, з якої отримуємо, що $\angle ACD = \angle BDC$. Тоді за другою ознакою рівності трикутників (задача 23) маємо, що трикутники ACO та BDO рівні і, отже, $AO = OB$, тобто точка O — середина AB — існує.

Доведемо тепер єдиність середини. Припустимо, що відрізок AB має дві середини O_1 та O_2. Існує рух, який залишає на місці точку O_1 і переставляє півпрямі O_1A та O_1B. Цей рух переводить точку A в точку B, а B — в A, оскільки $O_1A = O_1B$ (задача 14). Точка O_2 при цьому русі переходить в деяку точку O_2'. Оскільки $AO_2 = AO_2' = BO_2$, то $O_2' \equiv O_2$, що неможливо, оскільки O_2 і O_2' розміщені по різні боки від точки O_1. Отже, O — середина AB — єдина.

27. Нехай (h, k) — кут з вершиною O, l — промінь, який лежить між h і k і виходить з вершини O, такий, що $(h, l) = (l, k)$, тобто l — бісектриса кута (h, k). Доведемо спочатку існування такого променя l. Для цього відкладемо з вершини O кута (h, k) на його сторонах рівні відрізки OA та OB. Нехай C — середина відрізка AB. Трикутники AOC та BOC рівні (за третьою ознакою рівності трикутників). Звідси отримуємо рівність кутів, утворених променем OC з променями h і k, тобто бісектриса $l \equiv OC$ існує.

Доведемо тепер єдиність променя l. Нехай існує два таких променя l_1 та l_2. Вони перетинають відрізок AB у точках C_1 та C_2. Із рівності трикутників AOC_1 і BOC_1, AOC_2 і BOC_2 випливає, що кожна з точок C_1 і C_2 є серединою відрізка AB. Однак це протирічить попередній задачі. Отже, бісектриса l кута (h, k) існує і єдина.

28. Теорема. *Зовнішній кут трикутника більший довільного внутрішнього, не суміжного з ним.*

Доведемо це твердження. Нехай ABC — даний трикутник. Покажемо, що зовнішній кут трикутника ABC при вершині C більший за $\angle A$ та $\angle B$. Візьмемо точку O — середину сторони BC. Із точки A проведемо через точку O півпряму і відкладемо на ній відрізок, рівний OA. Нехай D — кінець цього відрізка.

Точка D лежить у півплощині, яка визначається прямою (BC) і містить продовження півпрямої $[CA)$. З іншого боку, точка D лежить у півплощині, визначеній прямою (AC), яка містить півпряму $[CB)$. Звідси випливає, що півпряма $[CD)$ лежить між півпрямою $[CB)$ і продовженням півпрямої $[CA)$. А це означає, що кут BCD менший зовнішнього кута ABC при вершині C.

Трикутники ABO та DOC рівні (за першою ознакою рівності трикутників), тому кути ABO та DCO, як відповідні, рівні. Отже, $\angle B$ трикутника ABC менший зовнішнього кута при вершині C. Оскільки B і C — довільні дві вершини трикутника, то цим твердження доведено повністю.

29. Паралельні прямі існують. Справді, у двох різних точках прямої (a) встановимо до неї два перпендикуляри. Прямі, які містять ці перпендикуляри, паралельні. Якби ці прямі перетнулися, то виник би трикутник з двома прямими внутрішніми кутами.

30. Нехай ABC — даний трикутник і $AB > AC$. Відкладемо на AB відрізок, рівний AC. Нехай C' — кінець цього відрізка. Тоді $\triangle ACC'$ — рівнобедрений, а тому кути $AC'C$ і ACC' при основі рівні (задача 22). Але $\angle AC'C$, як зовнішній кут для трикутника $BC'C$, більший кута ABC. Звідси маємо, що $\angle ACB$ (рівний $\angle ACC'$) більший від $\angle ABC$.

31. Розглянемо трикутник у якого кут BAC більший за кут ABC. Проведемо промінь з вершиною у точці A так, щоб він утворював з променем AB кут, рівний куту ABC. Цей промінь перетне відрізок BC у точці L, яка лежить між точками B і C, бо кут BAL менший за кут BAC. Виник рівнобедрений $\triangle ABL$ ($AL = BL$). У $\triangle ALC$ сума довжин $AL+LC > AC$, але $AL = BL$ і тому $BL + LC = BC > AC$. Тому у трикутнику проти більшого кута лежить більша за довжиною сторона.

32. Нехай ABC — даний трикутник. Відкладемо на продовженні відрізка AB поза точкою B відрізок, рівний BC. Отримаємо точку C'. Оскільки $\angle BC'C = \angle BCC'$ ($\triangle BC'C$ — рівнобедрений з основою CC'), то $\angle BC'C$ менший ніж $\angle ACC'$. Згідно з задачею 31, маємо, що відрізок AC менший від AC', а $AC' = AB + BC$, тобто $AC < AB + BC$.

Твердження про різницю сторін доводиться аналогічними міркуваннями (проведіть самостійно).

33. Нехай C — круг з центром в точці O, радіусом r і межею K; (a) — деяка пряма, яка містить внутрішню точку P круга C і лежить у площині круга C. Розглянемо два випадки: 1) пряма (a) проходить через точку O; 2) пряма (a) не проходить через O.

В першому випадку твердження задачі очевидне, оскільки на кожній із півпрямих прямої (a), визначених точкою O, існує і притому єдина точка X така, що $OX = r$ (задача 14).

Розглянемо другий випадок. Проведемо через центр O пряму, перпендикулярну до (a). Вона перетне (a) в деякій точці A. Покажемо, що A — внутрішня точка круга C. Дійсно, якщо точка A не співпадає з P (якщо A співпадає з P, то вона внутрішня за побудовою), то трикутник OAP прямокутний і, згідно з задачею 31, $OA < OP < r$, тобто A — внутрішня.

Точка A розбиває пряму (a) на дві півпрямі (a') та (a''). Розіб'ємо всі точки прямої (a) на два класи. В перший клас віднесемо всі точки півпрямої (a'), а також всі точки X півпрямої (a''), для яких $OX < r$; в другий клас — всі інші точки прямої (a). Покажемо, що це розбиття точок прямої на класи задовольняє умову аксіоми IV Дедекінда.

Перший клас не є порожнім, бо до нього належить півпряма (a'). На півпрямій (a'') існує точка X така, що $AX = r$. Ця точка належить до другого класу, оскільки із прямокутного трикутника OAX маємо, що $OX > AX = r$. Таким чином, кожен з класів непорожній.

Нехай X — точка першого класу, а Y — точка другого класу. Покажемо, що $X < Y$. Це очевидно, коли X лежить на півпрямій (a'). Нехай X належить півпрямій (a''). Припустимо, що $Y < X$. Кут OYA гострий, отже, кут OYX — тупий. І оскільки $\angle OXA$ гострий, то в трикутнику OXY: $OY < OX < r$, тобто Y належить до першого класу, що суперечить умові.

Нехай D — точка, яка виконує поділ на класи згідно з аксіомою Дедекінда IV. Покажемо, що $OD = r$.

Припустимо, що $OD < r$. Відкладемо від точки D в напрямку півпрямої (a'') відрізок, рівний $(r - OD)$. Нехай E — кінець цього відрізка. згідно з задачею 33, застосовуючи її до $\triangle ODE$, маємо, що $OE < OD + DE = OD + (r - OD) = r$, звідки $OE < r$. Отже, E належить до першого класу, але це неможливо, оскільки $D < E$. Аналогічно виключається припущення, що $OD > r$. Таким чином, $OD = r$ і точка D є точкою перетину кола K (межі даного круга C) з півпрямою (a'').

Доведемо єдиність точки D. Допустимо, що існує дві точки D_1 і D_2 перетину півпрямої (a'') з колом K. Нехай D — середина відрізка D_1D_2. Із рівності трикутників OD_1D і OD_2D випливає, що (OD) перпендикулярна до (a). Але це неможливо, бо, в силу єдиності перпендикуляра з деякої точки до прямої (задача 20), $A \equiv D$, а точки D_1 і D_2 розміщені по один бік від точки A.

Аналогічно доводиться існування і єдиність точки перетину півпрямої (a') з колом K, що і доводить твердження задачі.

34. Теорема про міру відрізка. *Існує, причому єдина, функція μ, визначена на всіх відрізках, яка задовольняє умови:*

1) для кожного відрізка AB $\quad \mu(AB) > 0$;

2) якщо відрізки AB і CD рівні (конгруентні), то $\mu(AB) = \mu(CD)$;

3) якщо точка C є внутрішньою для відрізка AB, то $\mu(AC) + \mu(CB) = \mu(AB)$;

4) для деякого відрізка A_0B_0 $\quad \mu(A_0B_0) = 1$.

Теорема про міру кута. *Існує, причому єдина, функція ν, визначена для всіх кутів, яка задовольняє умови:*

1) для кожного кута (h, k) $\quad \nu(h, k) > 0$;

2) якщо кути (h, k) і (l, m) рівні (конгруентні), то
$\nu(h, k) = \nu(l, m)$;

3) якщо промінь l знаходиться між h і k, то
$\nu(h, l) + \nu(l, k) = \nu(h, k)$;

4) для деякого кута (h_0, k_0) $\quad \nu(h_0, k_0) = 1$.

35. Побудуємо дві послідовності додатних дійсних чисел $\alpha_n^{'}$ та $\alpha_n^{''}$ вигляду $\dfrac{m}{2^k}$, які збігаються до α так, щоб перша була неспадною, а друга незростаючою. Очевидно, існують відрізки $A_n^{'}B_n^{'}$ та $A_n^{''}B_n^{''}$ такі, що $\mu(A_n^{'}B_n^{'}) = \alpha_n^{'}$, $\mu(A_n^{''}B_n^{''}) = \alpha_n^{''}$. Відкладемо відрізки $A_n^{'}B_n^{'}$ та $A_n^{''}B_n^{''}$ на деякій прямій (a) із деякої точки A в одному напрямку. Нехай $A_n^{'}$ та $A_n^{''}$ — кінці цих відрізків. Тоді всі відрізки $A_n^{'}A_n^{''}$ мають спільну точку B (поясніть чому). Очевидно, що $\mu(AB) = \alpha$.

36. Перша ознака паралельності прямих. *Якщо дві прямі на площині перетнути третьою прямою (січною) і внутрішні різносторонні кути при січній рівні, то прямі па-*

ралельні.

Доведемо це. Нехай січна (c) перетинає прямі (a) і (b), відповідно, у точках A і B. Оскільки внутрішні різосторонні кути при січній рівні, то проведемо через середину M відрізка AB перпендикуляр до прямої (a).

Він перетне пряму (a) у точці K, а пряму (b) у точці L. $\triangle MKA = \triangle MLB$ за другою ознакою рівності трикутників. У рівних трикутниках проти рівних сторін $(AM = MB)$ лежать рівні кути. Отже, $\angle MLB = \angle MKA$, але, за побудовою, $\angle MKA$ — прямий. Тому KL — спільний перпендикуляр прямих (a) і (b) і прямі (a) та (b) паралельні.

37. Теорема (обернена до першої ознаки паралельності прямих). *Якщо паралельні прямі перетнути третьою (січною), то внутрішні різносторонні кути при січній рівні.*

Доведемо це твердження. Розглянемо паралельні прямі (a) і (b) та січну (AB). Через середину відрізка AB проведемо спільний перпендикуляр для прямих (a) і (b). Трикутники MBL і MKA (див. мал. до задачі 36) обидва прямокутні, гострі кути з вершиною M рівні, бо вони вертикальні. Тому $\angle KAM = \angle LBM$.

38. Друга ознака паралельності прямих. *Якщо дві прямі перетнути третьою і відповідні кути рівні, то прямі паралельні.*

Доведемо це твердження. Для доведення цієї ознаки зауважимо, що рівність відповідних кутів зводиться до рівності внутрішніх різносторонніх кутів при січній. Тому за першою ознакою паралельності прямих отримуємо вірність даного твердження. Отже, $\angle MLB = \angle MKA$, але, за побудовою, $\angle MKA$ — прямий.
Тому KL — спільний перпендикуляр прямих (a) і (b) і прямі (a) та (b) паралельні.

39. Теорема (обернена до другої ознаки паралельності прямих). *Якщо паралельні прямі перетнути третьою, то відповідні кути будуть рівні.*

Твердження вірне, оскільки вірна теорема, обернена до першої ознаки паралельності прямих.

40. Третя ознака паралельності прямих. *Якщо дві прямі перетнути третьою і сума внутрішніх односторонніх кутів при січній рівна двом прямим, то прямі паралельні.*

Дійсно, якщо α і β — внутрішні односторонні при січній кути і їх сума $\alpha + \beta = 2d$, то оскільки $\beta + \gamma = 2d$, де γ — суміжний кут для кута β, маємо, що $\alpha = \gamma$. Отже, внутрішні різносторонні кути при січній є рівними. Тому за першою ознакою паралельності, прямі паралельні.

41. Теорема (обернена до третьої ознаки паралельності прямих). *Якщо прямі паралельні, то сума внутрішніх односторонніх кутів при січній дорівнює двом прямим кутам.*

Доведемо це твердження. Перетнемо паралельні прямі третьою прямою і позначимо внутрішні різносторонні кути при січній через α і γ. Згідно з теоремою, оберненою до першої ознаки паралельності прямих, $\alpha = \gamma$. Оскільки $\alpha + \beta = 2d$, бо α і β — суміжні кути, то $\alpha + \gamma = 2d$.

42. Теорема (про суму внутрішніх кутів трикутника). *У довільному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює двом прямим.*

Дійсно, нехай $\triangle ABC$ — даний. Проведемо через точку C пряму, паралельну до (AB). Дві півпрямі, на які розбиває цю пряму точка C і півпрямі (CA) і (CB) утворюють три кути. Один з них — це кут ACB даного трикутника, а два інші, в силу задачі 39, дорівнюють кутам CAB і CBA трикутника ABC. Звідси випливає, що сума $\angle ACB + \angle CAB + \angle CBA$ дорівнює розгорнутому куту, який рівний сумі двох прямих кутів.

43. Перша ознака подібності трикутників. *Два трикутники, у яких відповідні два кути рівні, подібні.*

Справді, нехай $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ — задані і у них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. За теоремою про суму кутів трикутника (задача 42), $\angle C = \angle C_1$. Подіємо на $\triangle A_1B_1C_1$ рухом, при якому вершина C_1 співпадає з вершиною C, а вершини A_1 і B_1 переходять в точки A_2 і B_2 півпрямих (CA) та (CB), відповідно, (і розташовані по той же бік від точки C, що і точки A_1 та B_1). Оскільки $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C$, то $\angle B_2A_2C = \angle BAC$, звідки маємо, що прямі (A_2B_2) та (AB) паралельні. Звідси, за теоремою Фалеса, отримуємо, що $\dfrac{CA_2}{CA} = \dfrac{CB_2}{CB}$. Оскільки $CA_2 = C_1A_1$ та $CB_2 = C_1B_1$, то $\dfrac{C_1A_1}{CA} = \dfrac{C_1B_1}{CB}$. Аналогічно отримуємо, що $\dfrac{C_1B_1}{CB} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$, отже, трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ подібні.

44. Теорема Піфагора. *У довільному прямокутному трикутнику сума квадратів довжин катетів дорівнює квадрату довжини гіпотенузи.*

Дійсно, нехай ABC — деякий прямокутний трикутник ($\angle C$ — прямий). Опустимо перпендикуляр CD із вершини прямого кута на гіпотенузу AB. Основа перпендикуляра D знаходиться між точками A і B (справді, припустивши, що точки A і B лежать по один бік від D, отримуємо суперечність з тим, що зовнішній кут трикутника більший будь-якого внутрішнього, не суміжного з ним). Із подібності трикутників ABC, ACD і BCD (за першою ознакою подібності) отримуємо пропорції: $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$, $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$, звідки $AC^2 = AB \cdot AD$, $BC^2 = AB \cdot BD$. Додамо останні рівності, враховуючи, що $AD + DB = AB$: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$, що і доводить теорему.

45. Теорема (обернена до теореми Піфагора). *Якщо квадрат довжини однієї сторони трикутника дорівнює сумі квадратів довжин двох інших сторін, то трикутник прямокутний.*

Справді, нехай у $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Доведемо, що кут C — прямий. Побудуємо прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з катетами $A_1C_1 = AC$ і $B_1C_1 = BC$. За теоремою Піфагора, $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$ і, отже, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$. Але за умовою теореми, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Тоді $A_1B_1^2 = AB^2$, тобто $A_1B_1 = AB$. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за трьома сторонами. З рівності трикутників випливає рівність кутів: $\angle C = \angle C_1$, звідки отримуємо, що $\angle C$ трикутника ABC — прямий. Теорему доведено.

46. Теорема. *Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі внутрішніх кутів, не суміжних з ним.*

Дійсно, нехай $\triangle ABC$ — заданий. Відомо (задача 42), що сума внутрішніх кутів довільного трикутника дорівнює двом прямим. Звідси випливає, що сума величин довільних двох внутрішніх кутів, наприклад $\angle A + \angle B$, дорівнює різниці величин двох прямих кутів і третього кута при вершині C. А ця різниця і дорівнює величині зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C, що і треба було довести.

47. Кут з вершиною у точці A опирається на дугу KL кола круга K. Вертикальний йому кут опирається на дугу $K'L'$ круга K. З'єднаємо точки L і L' хордою LL' і розглянемо трикутник ALL'.

Кути $KL'L$ та $K'LL'$ вписані і тому рівні $\angle KL'L = \frac{1}{2}\overset{\smile}{KL}$ та $\angle K'LL' = \frac{1}{2}\overset{\smile}{K'L'}$. За теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle KAL = \angle K'AL' = \angle KL'L + \angle K'LL' = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{KL} + \overset{\smile}{K'L'})$.

Отже, $\angle KAL = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{KL} + \overset{\smile}{K'L'})$.

48. Нехай сторони кута з вершиною у точці A (яка розміщена зовні круга K) перетинають коло круга K у точках B, B', L і L'.

З'єднаємо точки B і L' хордою BL'. Кути $B'BL'$ та $BL'L$ вписані у коло круга K і тому $\angle B'BL' = \frac{1}{2}\overset{\smile}{B'L'}$ та $\angle BL'L = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BL}$. За теоремою про величину зовнішнього кута трикутника, маємо $\angle B'BL' = \angle BL'A + \angle L'AB$.

Отже, $\angle L'AB' = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{B'L'} - \overset{\smile}{BL})$.

49. Нехай B — точка дотику дотичної (AB) з колом круга K, а L і L' — точки перетину іншої сторони кута BAL' з колом круга K.

З'єднаємо точки B і L хордою BL. Кут BLL' вписаний і тому $\angle BLL' = \frac{1}{2}\overset{\smile}{L'B}$. Кут LBA (між дотичною і хордою, проведеною з точки дотику дотичної) дорівнює $\frac{1}{2}\overset{\smile}{BL}$ (доведіть це). За теоремою про величину зовнішнього кута $\triangle LBA$, маємо

$\angle BAL' = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{L'B} - \overset{\smile}{BL})$.

50. Якщо A — точка дотику дотичної (AL) до кола круга K, а (AB) — січна, то проведемо через точку B пряму (BC), паралельну до дотичної.

За аксіомою Евкліда (V) така пряма єдина. Очевидно, що $\angle ABC$ вписаний у коло круга K. За теоремою, оберненою до першої ознаки паралельності прямих, кути $\angle CBA$ та $\angle BAL$ рівні. Отже, $\angle BAL = \angle CBA = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$. $\angle BAL = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$.

51. Теорема. *Вписаний в круг кут вимірюється половиною дуги, на яку він опирається.*

Для доведення розглянемо три випадки розміщення центра O круга відносно сторін даного вписаного кута ABC.

1) Центр кола лежить на одній із сторін вписаного кута (рис.а) Проведемо відрізок OA і розглянемо центральний кут AOC. Він є зовнішнім кутом $\triangle AOB$. За властивістю зовні-

шнього кута трикутника, $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Але $\angle OBA = \angle OAB$, оскільки $\triangle AOB$ — рівнобедрений ($AO = OB$), а $\angle OBA$ і $\angle OAB$ — кути при основі AB трикутника AOB. Тому $\angle AOC = 2\angle ABC$ або $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Але $\angle AOC$ вимірюється дугою AC, отже вписаний кут ABC вимірюється половиною дуги AC.

2) Центр кола лежить всередині вписаного кута ABC (рис. б). Тоді, провівши промінь BO, який пройде між променями BA і BC, отримаємо, що $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$. За доведеним у першому випадку, $\angle ABD$ вимірюється половиною дуги $\overset{\smile}{AD}$, а $\angle DBC$ — половиною дуги $\overset{\smile}{DC}$. Тому $\angle AB$ вимірюється сумою півдуг $\overset{\smile}{AD}$ і $\overset{\smile}{DC}$, тобто половиною дуги $\overset{\smile}{AC}$.

3) Центр кола лежить зовні вписаного кута ABC (рис. в). Для цього випадку доведення проведіть самостійно.

52. Формула зв'язку градусної та радіанної міри кута. Довжина кола, радіус якого дорівнює R, обчислюється за формулою $C = 2\pi R$. Тоді довжина дуги в 1^0 дорівнює $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тому довжина l дуги, яка містить α^0, виражається формулою $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

Радіанна міра кута — це відношення довжини відповідної дуги кола до радіуса кола. З формули для довжини дуги кола випливає, що $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$, тобто радіанну міру кута отримуємо з градусної, множенням на $\frac{\pi}{180}$. Отже, $\alpha_{.} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{.}$.

53. Узагальнена теорема синусів. *Відношення довжин сторін довільного трикутника до синусів відповідних протилежних кутів є сталим і дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Для доведення розглянемо довільний $\triangle ABC$, у якого $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Опишемо навколо $\triangle ABC$ коло радіуса R. Через одну з вершин трикутника, наприклад A, проведемо діаметр AC_1 описаного кола. $\triangle ABC_1$ — прямокутний ($\angle ABC_1 = \frac{\pi}{2}$), тому $AB = c = 2R\sin\angle AC_1B$. Якщо $\angle C$ — гострий, то $\angle C = \angle C_1$ (як вписані кути, що опираються на одну і ту ж дугу кола) і $\sin\angle C_1 = \sin\angle C = \sin\gamma$. Якщо ж $\angle C$ — тупий, то кут $\angle C_1$ гострий, оскільки $\angle C + \angle C_1 = \pi$. Звідси $\angle C_1 = \pi - \angle C$. Отже,

$\sin\angle C_1 = \sin(\pi - \angle C) = \sin\angle C = \sin\gamma$. В обох випадках маємо, що $c = 2R\sin\gamma$. Якщо ж $\angle C$ — прямий, то $c = 2R$, $\sin\angle C = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ і ця рівність також має місце.

Проводячи аналогічні міркування, отримуємо такі ж рівності для двох інших кутів трикутника ABC: $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, звідки маємо потрібні відношення.

54. Теорема косинусів. *Квадрат довжини сторони довільного трикутника дорівнює сумі квадратів довжин двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Для доведення розглянемо довільний $\triangle ABC$, у якого $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Застосуємо векторний метод доведення. Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Тоді $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$. Піднесемо цю рівність скалярно до квадрату. Отримаємо: $\vec{a}^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2(\vec{b}, \vec{c}) = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$, звідки $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Аналогічно доводяться інші рівності (проведіть ці доведення самостійно).

55. Ознака паралельності прямої і площини. *Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.*

Для доведення розглянемо довільні площину (α) і пряму (a), що не лежить в (α). Нехай (a_1) — пряма у площині (α), паралельна до прямої (a). Через прямі (a) і (a_1) можна провести площину (α_1) (поясніть чому). Вона буде відмінна від (α), оскільки пряма (a) не належить площині (α). Площини (α) і (α_1) перетинаються по прямій (a_1) (поясніть чому). Якби пряма (a) перетинала площину (α) (тобто якби вони не були паралельні), то точка перетину (a) з (α) належала б прямій (a_1). Але це неможливо, оскільки прямі (a) та (a_1) паралельні. Отже, пряма (a) не перетинає площину (α), тобто паралельна до (α).

56. Ознака паралельності двох площин. *Якщо дві прямі, які перетинаються і належать одній площині, відповідно паралельні двом прямим, які перетинаються і належать іншій площині, то площини паралельні.*

Дійсно, нехай (α) і (β) — дані площини, (a_1), (a_2) — дві прямі площин (α), які перетинаються у точці A, (b_1), (b_2) — дві прямі у площині (β), які перетинаються у точці B і $(a_1)\|(b_1)$, $(a_2)\|(b_2)$. Площини (α) і (β) різні. Доведемо, що вони паралельні. Допустимо, що вони перетинаються по деякій прямій (c). Прямі (b_1) і (b_2) не перетинають площину (α) (бо в (α) прямі (a_1) і (a_2) такі, що $(b_1)\|(a_1)$, $(b_2)\|(a_2)$), отже, не перетинають і пряму (c). Але це неможливо за аксіомою паралельності, оскільки прямі (b_1) і (b_2), які перетинаються і лежать в одній площині (β), паралельні до прямої (c). Прийшли до суперечності, отже, (α) і (β) не перетинаються, тобто паралельні.

57. Ознака перпендикулярності прямої і площини. *Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку їх перетину, то вона перпендикулярна до площини.*

Для доведення розглянемо пряму (a), яка перетинає площину (α) в точці A і перпендикулярна до прямих (b) і (c), що лежать у цій площині й проходять через точку A. Доведемо, що пряма (a) перпендикулярна до площини (α). Для цього слід довести, що (a) перпендикулярна до довільної прямої цієї площини, яка містить точку A. Для цього проведемо у площині (α) через точку A пряму (x) і покажемо, що вона перпендикулярна до прямої (a). Проведемо у площині (α) пряму, що не проходить через точку A і перетинає прямі (b), (c) й (x). Нехай точками перетину будуть B, C й X відповідно.

Відкладемо на прямій (a) від точки A у різних півпросторах відносно площини (α) рівні відрізки AA_1 та AA_2. Трикутник A_1CA_2 рівнобедрений (бо відрізок AC є висотою за умовою теореми і медіаною за побудовою $(AA_1 = AA_2)$. З тієї ж причини $\triangle A_1BA_2$ теж рівнобедрений. Отже, $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$ за третьою ознакою рівності трикутників. З цієї рівності випливає рівність кутів $\angle A_1BX$ та $\angle A_2BX$, а тому маємо рівність трикутників $\triangle A_1BX$ та $\triangle A_2BX$ (за першою ознакою рівності трикутників). Звідси $A_1X = A_2X$, тому $\triangle A_1XA_2$ — рівнобедрений. А отже, його медіана AX є висотою. Це означає, що пряма x перпендикулярна до (a).

58. Теорема про три перпендикуляри. *Пряма, проведена на площині через основу похилої перпендикулярно до її проекції, перпендикулярна і до самої похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна до проекції похилої.*

Дійсно, нехай AB — перпендикуляр до площини (α), AC — похила, (c) — пряма на площині (α), яка проходить через основу C похилої. Проведемо пряму (CA'), перпендикулярну до площини (α). Вона паралельна до прямої (AB) (поясніть чому). Проведемо через прямі (AB) та $(A'C)$ площину (β). Пряма (c) перпендикулярна до прямої $(A'C)$. Вона також перпендикулярна до прямої (CB), тому перпендикулярна до площини (β), а, отже, і до прямої (AC).

Аналогічно, якщо пряма (c) перпендикулярна до похилої (CA), то вона, як перпендикулярна і до прямої (CA'), перпендикулярна до площини (β), а отже, і до проекції похилої (BC).

59. Розглянемо площину (α) і пряму (a), перпендикулярну до площини (α). Нехай пряма (a) є спільною для площин (β) і (γ). Тоді за ознакою перпендикулярності площин, $(\beta)\perp(\alpha)$ та $(\gamma)\perp(\alpha)$. Нехай прямі (b) і (c) — це прямі перетину площин (β) і (γ) з площиною (α), відповідно. Оскільки площини (β) і (γ) різні, то прямі (b) і (c) також різні, але вони претинаються у точці, яка збігається з точкою перетину перпендикуляра a з площиною (α). Нехай тепер S — довільна точка прямої (a), яка не є точкою площини (α). Проведемо через точку S дві різні площини (u) та (v) так, щоб кожна з них перетнула прямі (b) і (c), відповідно, у точках A, B та C, D. Фігура, $SABCD$ — шукана. Вона є чотирикутною пірамідою з вершиною S і основою $ABCD$. Бічні грані SAC і SBD є протилежними. Вони лежать, відповідно, у площинах (β) і (γ), які перпендикулярні до основи піраміди (площини (α)).

60. У декартовій реалізації планіметричних аксіом $(I-V,\,22)$ рух визначається співставленням точці $(x;y)$ точки $(x';y')$, де $x'=x\cos\theta-\varepsilon y\sin\theta+x_0$, $y'=x\sin\theta+\varepsilon y\cos\theta+y_0$, θ, x_0, y_0 — довільні дійсні числа, $\varepsilon=\pm1$.

Розглянемо пряму (a), задану рівнянням $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq0$. Виразимо у формулах, якими визначається рух, x та y через x' та y': $x=x'\cos\theta+y'\sin\theta-x_0\cos\theta-y_0\sin\theta$, $y=\dfrac{1}{\varepsilon}(-x'\sin\theta+y'\cos\theta+x_0\sin\theta-y_0\cos\theta)$. Тоді якщо рух позначити символом H, то $H(f)$: $(a\cos\theta-\varepsilon b\sin\theta)x'+(a\sin\theta+\varepsilon b\cos\theta)y'+(\varepsilon b\sin\theta-a\cos\theta)x_0-(a\sin\theta+\varepsilon b\cos\theta)y_0+c=0$. Дійсно, образом прямої (f) при русі H буде пряма $H(f)$: $a'x'+b'y'+c'=0$, оскільки $(a')^2+(b')^2=a^2+b^2\neq0$.

61. Аксіома a деякої теорії T з аксіоматичною будовою називається незалежною, якщо вона не може бути отримана як наслідок інших аксіом теорії T. Отже, якщо можливо побудувати реалізацію системи аксіом $(I-V,22)$ без аксіоми Дедекінда таку, в якій аксіома Дедекінда не виконується, то аксіома Дедекінда у системі $(I-V,22)$ незалежна.

Нехай G — сукупність дійсних чисел, яка містить усі раціональні числа, а також усі числа, які отримуються з раціональних застосуванням у скінченній кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення і добування квадратного кореня. Ясно, що числами множини G не вичерпуються усі дійсні числа. Будуємо декартову реалізацію системи аксіом евклідової геометрії, опираючись лише на числа множини G. Отже, точка це упорядкована пара (x,y), $x\in G$, $y\in G$, а пряма — сукупність точок, координати яких задовольняють рівняння $ax+by+c=0$, де $a,b,c\in G$. Відношення порядку для точок прямої, рух визначимо так, як це зроблено при декартовій реалізації системи аксіом О.В. Погорєлова, коли використовувалася множина дійсних чисел. Усі аксіоми зв'язку, порядку і руху у новій реалізації будуть виконаними. Аксіома Дедекінда не виконується. Справді, якщо λ — число, яке не міститься у G, то розбивши множину точок прямої $y=0$ на два класи: до першого класу віднесемо точки $(x,0)$ при $x<\lambda$, а до другого класу — ті точки $(x,0)$, у яких $x>\lambda$, маємо що кожен клас не порожний. Кожна точка першого класу передує кожній точці другого класу. За аксіомою Дедекінда на прямій $y=0$ має існувати точка $(\mu,0)$, яка задає розріз Дедекінда, коли $\mu=\lambda$, але такої точки на прямій $y=0$ не існує і тому аксіома Дедекінда не виконується.

62. Згідно схеми розв'язування задачі 61 будуємо реалізацію системи аксіом $(I-V,22)$

без аксіоми Евкліда. Нехай точка — це внутрішня точка одиничного круга $x^2 + y^2 < 1$, а пряма — хорда цього круга. Належність точки прямій така ж, як і у евклідовій геометрії. Рухом назвемо довільну колінеацію, яка коло $x^2+y^2 = 1$ переводить у себе. У такій реалізації планіметричні аксіоми системи $(I - V$,22) виконуються. Аксіома паралельності очевидно не виконується, оскільки через "точку"поза "прямою"в середині одиничного круга проходить безліч "прямих— хорд цього круга, які не перетинають дану "пряму". Описану реалізацію називають реалізацією Ф.Клейна.

63. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD мають спільну точку O. Отже, точки A, O і C — різні точки прямої AC, а точки B, O і D — різні точки прямої BD. Прямі AC і BD — різні і мають спільну точку O. За аксіомою C_3 системи аксіом $(I - V$,13) існує єдина площина, яка містить прямі AC і BD. Саме ця площина містить усі вершини чотирикутника $ABCD$.

64. Нехай $ABCD$ — просторовий чотирикутник, а K, L, M і N — середини, відповідно, його сторін AB, BC, CD і AD. Тоді для $\triangle ABC$ і $\triangle ADC$ середні лінії KL і MN паралельні AC і тому $KL||MN$. Аналогічно для $\triangle ABD$ і $\triangle BCD$ середні лінії KN і LM паралельні BD і тому $LM||KN$. Отже, чотирикутник $KLMN$ — паралелограм. Площина паралелограма містить у собі усі середини сторін просторового чотирикутника $ABCD$.

65. Площина трикутника ABD збігається з площиною ромба $ABCD$ та з площиною, яка визначається паралельними прямими (a) і (BD). У цій площині $(AB)||(CD)$ і $(a)||(BD)$ за умовою. Але ж (AB) перетинає (a) у точці A, тоді (CD) перетинає (a) у деякій точці, оскільки $(CD)||(AB)$.

66. Нехай $(a)\dot{-}(b)$. Через довільну точку A прямої (a) і пряму (b) проведемо площину (α). Оскільки точка A не належить прямій (b), то площина (α) існує і вона єдина. У площині (α) через точку A проходить єдина пряма (a') паралельна (b) за аксіомою паралельності. Аналогічно, через довільну точку B прямої (b) проведемо площину (β), яка містить пряму (a). За аксіомою паралельності у площині (β) існує єдина пряма (b'), яка проходить через точку B паралельно прямій (a). Прямі (a) і (a') перетинаються і визначають площину (u). Прямі (b) і (b') перетинаються і визначають площину (v). Площини (u) і (v) паралельні за ознакою паралельності площин. При цьому $(a) \subset (u)$ і $(b) \subset (v)$.

67. Доведення можна провести методом від супротивного. Якщо прямі (AC) і (BD) лежали би в одній площині, то цій площині належали б і прямі (AB) і (CD), що суперечить умові.

68. Розглянемо трапецію $ABCD$, $AD||BC$, $AD > BC$. Нехай S — точка перетину прямих (AB) і (DC), які містять бічні сторони трапеції. Точка B лежить між точками A і S на прямій (AB), а точка C лежить між точками D і S на прямій (DC). Застосуємо для $\triangle ACS$ твердження Паша відносно прямої (DB). Умови твердження Паша виконані, тому вірним є висновок цього твердження. Але пряма (DB) не перетинає сторони CS трикутника ACS. Тому вона перетинає його сторону AC. Отже, (DB) і (AC) перетинаються.

69. Якщо K — середина AB і L — середина BC трикутника ABC, то застосуйте твердження Паша для $\triangle ALB$ і прямої (KC).

70. У $\triangle ABC$ бісектриса AL перетинає сторону BC у точці L, яка лежить між точками B і C. Бісектриса CK перетинає сторону AB у точці K, яка лежить між точками A і B. Застосуємо твердження Паша для $\triangle ALB$ і прямої CK. (CK) не перетинає BL і тому перетинає

AL.

71. Пропонуємо читачеві доведення, знайдене К.Ф.Гауссом. У довільного трикутника ABC через кожну його вершину у площині цього трикутника проведемо прямі, паралельні протилежним сторонам. Утвориться новий трикутник, серединами сторін якого будуть вершини A, B і C трикутника ABC. Серединні перпендикуляри нового трикутника містять висоти $\triangle ABC$ і перетинаються у точці, яка є центром описаного кола навколо нового трикутника.

72. Якщо S — точка перетину бічних сторін трапеції $ABCD$, $AD||BC$, $AD > BC$, то точка O — перетину діагоналей трапеції і S — різні точки, оскільки вони належать різним півплощинам площини трапеції $ABCD$ відносно прямої BC. За першими двома аксіомами зв'язку існує єдина пряма SO, яка перетинає нижню і верхню основи трапеції, відповідно, у точках L і K. Доведемо, що L і K — середини основ трапеції. З подібності $\triangle KOC$ та $\triangle LOA$ маємо $\dfrac{KC}{AL} = \dfrac{KO}{OL}$. З подібності трикутників KOB та LOD маємо $\dfrac{BK}{LD} = \dfrac{KO}{OL}$. Отже, $\dfrac{KC}{BK} = \dfrac{AL}{LD}$. З подібності $\triangle SKC$ і $\triangle LSD$ маємо $\dfrac{KC}{LD} = \dfrac{KS}{LS}$, а з подібності $\triangle BSK$ і $\triangle ASL$ — $\dfrac{BK}{AL} = \dfrac{KS}{LS}$. Тому $\dfrac{KC}{LD} = \dfrac{BK}{AL}$ або $\dfrac{KC}{BK} = \dfrac{LD}{AL}$. Отже, $\dfrac{AL}{LD} = \dfrac{LD}{AL}$ і тому $AL = LD$ і $BK = KC$. Пряма SO збігається з прямою KL.

73. Допустимо, що існує трапеція $ABCD$, $AD||BC$, $AD > BC$ така, що точка O перетину діагоналей належить середній лінії трапеції. Трикутники AOD і BOC мають рівні висоти, які проведені з вершини O до їх основ, і вони подібні. Звідси випливає рівність $AD = BC$, яка спростовує допущення.

74. Суми довжин протилежних сторін чотирикутника, описаного навколо кола, рівні. Справді, відрізки дотичних, проведених з кожної вершини описаного чотирикутника до кола, рівні і тому суми довжин протилежних сторін описаного чотирикутника рівні.

75. Для того, щоб опуклий чотирикутник можна було вписати у коло, необхідно і досить, щоб сума його протилежних кутів дорівнювала $180°$.

Якщо $ABCD$ чотирикутник, вписаний у коло, то A, B, C і D — точки цього кола, а $\angle BAD$ і $\angle BCD$ — вписані кути з вершинами A і C на цьому колі. Отже, $\angle BAD = \dfrac{1}{2}\,\overset{\smile}{BCD}$ і $\angle BCD = \dfrac{1}{2}\,\overset{\smile}{DAB}$. Тому $\angle BAD + \angle BCD = \dfrac{1}{2}C$, де C — довжина кола. Отже, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$.

Якщо ж у чотирикутнику $ABCD$ сума протилежних кутів $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, то і сума іншої пари протилежних кутів $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Оскільки жодні три вершини опуклого чотирикутника не лежать на одній прямій, то існує коло K — описане навколо $\triangle ABC$. Доведемо, що четверта вершина D належить колу K. Нехай D — внутрішня точка круга, обмеженого колом K. Тоді $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC_1A_1C}$ і $\angle ADC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{ABC} + \overset{\smile}{C_1A_1})$. Тому $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC_1A_1C} + \overset{\smile}{ABC} + \overset{\smile}{C_1A_1}) > 180°$, що суперечить допущенню. Нехай D — зовнішня точка круга, обмеженого колом K. Тоді $\angle ABC + \angle ADC < 180°$, бо $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AA_1C_1C}$, $\angle AOC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{ABC} - \overset{\smile}{A_1C_1})$, що суперечить умові.

76. Площина Лобачевського в інтерпретації Ф.Клейна — це внутрішність круга $x^2+y^2 < 1$. Будуємо паралельні прямі AB і CB і перетинаємо їх прямими KL і MN. Фігура $XYZU$ — шукана.

77. На крузі Клейна точки перетину двох пар паралельних прямих AB і CB та ED і FD є вершинами паралелограма. Точки A, B, C, D, E, F — різні точки кола $x^2 + y^2 = 1$.

78. В інтерпретації Пуанкаре пряма — це півколо з центром на вісі OY у верхній півплощині (YOZ). Точки вісі OY не належать площині Лобачевського в цій інтерпретації. Прямими також вважаються промені з вершинами на вісі OY, які перпендикулярні до вісі OY. Паралельні прямі — це кола, які дотикаються у точці на вісі OY. Отже, трапеція — це чотирикутник, вершинами якого є точки перетину нн паралельних між собою двох різних кіл з парою кіл, які мають спільну точку дотику на вісі OY. Паралелограм — це чотирикутник, вершинами якого є точки перетину однієї пари кіл, що дотикаються у точці на вісі OY з іншою парою кіл, що дотикаються у іншій точці на вісі OY. Трикутник — фігура, утворена відрізками трьох кіл з центрами на вісі OY.

79. Якщо на площині Лобачевського існувала б прямокутна трапеція, то паралельні прямі мали б спільний перпендикуляр. Спільним перпендикуляром на площині Лобачевського володіють лише мимобіжні прямі.

80. Нехай u, v — дві точки верхньої півплощини моделі Пуанкаре. Неевклідова пряма, яка проходить через точки u і v, ортогональна вісі (x). Позначимо через s і t точки, в яких ця пряма (півколо) опирається на вісь (x). Самі точки s і t не є точками площини Лобачевського. Складне відношення точок $(uvst)$ — число дійсне і додатне. Тоді за міру відрізка uv площини Лобачевського обирають число $\rho(u,v) = R|\ln(uvst)|$, де R — деяка додатна стала.

81. В інтерпретації Ф.Клейна перпендикуляр, опущений з точки A на пряму (a), належить прямій, яка проходить через точку A, і полюс прямої (a). Якщо точка A збігається з центром круга Клейна, то перпендикулярність за Лобачевським збігається з перпендикулярністю за Евклідом.

82. Якщо радіус круга Клейна вважати рівним 1, то $\pi(x) = 2\operatorname{arctg} e^{-x}$. Отже, $\dfrac{\pi}{3} = 2\operatorname{arctg} e^{-x}$ і тому $x = \ln\sqrt{3}$.

83. Поверхня у просторі допускає елементарну геометрію, якщо існує такий рух у просторі, який довільну точку з вказаним у ній напрямком поверхні переводить у довільну точку цієї ж поверхні з вказаним у ній напрямком. Елементарна геометрія еквідістантної поверхні є геометрією Лобачевського, оскільки через довільну точку еквідістантної поверхні поза еквідістантою проходить не менше двох еквідістант, які не перетинають задану еквідістанту.

84. У реалізації Бельтрамі елементарна геометрія орісфери є геометрією Евкліда, оскільки справедливою є аксіома Евкліда для точок і оріциклів — прямих ліній.

85. Розглянемо пряму (a) і площину (α). За аксіомою I_4 системи аксіом $(I - III$,15) проективної геометрії у площині (α) існує принаймні одна точка A. Якщо точка A належить прямій (a), то твердження доведено. Нехай точка A не належить прямій (a). Тоді існує єдина площина (β), яка містить точку A і пряму (a). Ця площина (β) має з площиною (α) спільну точку A. За аксіомою I_7 площини (α) і (β) мають спільну пряму (b). Отже, у площині (β) міститься і пряма (a) і пряма (b). За аксіомою I_9 ці прямі перетинаються. Тому пряма (a) і площина (α) перетинаються.

86. Якщо A, B, C і D — точки деякої прямої, то обравши цю пряму за координатну вісь (x) маємо, що $A(x_A)$, $B(x_B)$, $C(x_C)$, $D(x_D)$. Формулою $x' = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ задамо проективне перетворення прямої. Позначимо через A', B', C' і D' — образи точок A, B, C і D при вказаному проективному перетворенні. Тоді

$$(A'B'C'D') = \frac{x_C^{'} - x_A^{'}}{x_C^{'} - x_B^{'}} : \frac{x_D^{'} - x_A^{'}}{x_D^{'} - x_B^{'}} =$$

$$= \frac{\dfrac{ax_C+b}{cx_C+d} - \dfrac{ax_A+b}{cx_A+d}}{\dfrac{ax_C+b}{cx_C+d} - \dfrac{ax_B+b}{cx_B+d}} : \frac{\dfrac{ax_D+b}{cx_D+d} - \dfrac{ax_A+b}{cx_A+d}}{\dfrac{ax_D+b}{cx_D+d} - \dfrac{ax_B+b}{cx_B+d}} =$$

$$= \frac{(cx_B+d)(x_A-x_C)}{(cx_A+d)(x_B-x_C)} : \frac{(cx_B+d)(x_A-x_D)}{(cx_A+d)(x_B-x_D)}$$

$$= \frac{x_A-x_C}{x_B-x_C} : \frac{x_A-x_D}{x_B-x_D} = (ABCD).$$

87. Якщо тривершинники ABC і $A'B'C'$ мають вісь перспективи, то вони мають центр перспективи. Навпаки, якщо тривершинники мають центр перспективи, то вони мають вісь перспективи. Д.Гільберт довів, що теорема Дезарга не може бути доведена лише на основі плоских аксіом зв'язку. Для побудови проективної планіметрії необхідно до аксіом зв'язку I_1-I_9 як аксіому приєднати твердження Дезарга.

88. Суть принципу двоїстості проективної планіметрії: якщо вірне твердження $\mathfrak{A}$ для точок і прямих, виражене у термінах інцидентності і порядку, то вірне твердження $\mathfrak{A}'$, яке отримується з твердження $\mathfrak{A}$ заміною в ньому слів "точка— "пряма", "пряма— "точка". Двоїстим твердженням до аксіоми I_2 є твердження аксіоми I_9.

89. Реалізація плоских аксіом проективної геометрії: точка — це довільна трійка дійсних чисел $(x_1; x_2; x_3)$, які не рівні одночасно нулеві; пряма — це сукупність точок, координати яких задовольняють рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, де $|a_1| + |a_2| + |a_3| \neq 0$. Точка належить прямій, якщо її координати задовольняють рівнянню прямої. Читач самостійно легко перевірить, що виконуються усі аксіоми зв'язку проективної планіметрії, а також у цій реалізації виконується аксіома Дезарга. Назвемо пряму $x_3 = 0$ нескінченно віддаленою прямою, а її точки назвемо нескінченно віддаленими. Якщо точки A, B і C не нескінченно віддалені, то порядок і на прямій означається слідуванням в одному напрямку, якщо виконується одна з трьох умов $A < B < C$, або $B < C < A$, або $C < A < B$. Ці точки слідують на прямій у протилежному напрямку, якщо виконується одна з умов $A > B > C$, або $B > C > A$, або $C > A > B$. Якщо Ω — нескінченно віддалена точка прямої, на якій задано точки A і B. Точки $AB\Omega$ слідують у першому згаданому напрямку, якщо $A < B$ та у протилежному до нього напрямку, якщо $B < A$. Трійка $A\Omega C$ слідує у першому напрямку, якщо $A > C$ та у протилежному напрямку, якщо $A < C$. Трійка ΩBC слідує у першому напрямку, якщо $B < C$ та у протилежному напрямку, якщо $B > C$. Слідування точок на прямій $x_3 = 0$ визначається проектуванням цих точок на "скінченну"пряму, де вже означено порядок слідування її трійок точок. Аксіоми порядку проективної планіметрії та аксіома неперервності виконуються в силу істинності певних теорем арифметики дійсних чисел.

90. На прямій (AB) будуємо чотиривершинник $PQRS$ так, щоб точки A і B були діагональними точками чотиривершинника, а точка перетину прямої (PR) з прямою (AB) була нескінченно віддаленою. Тоді точка перетину прямої (QS) з прямою (AB) буде серединою відрізка AB.

91. Розглянемо площину Лобачевського в інтерпретації Ф.Клейна. Прямі (a) і (b) — розбіжні (тому перетинаються у точці A зовні круга Клейна). Спільним перпендикуляром прямих (a) і (b) буде пряма, яка проходить через полюси для поляр-прямої (a) і прямої (b). Ця пряма є полярою точки A. Оскільки точка A зовнішна для круга Клейна, то спільний перпендикуляр має спільні точки з кругом Клейна.

92. Якщо h і l — два промені із спільною вершиною на площині Лобачевського, а α і β — промені дотичних до кола Клейна у точках, в яких доповняльні промені $\bar{h}$ і $\bar{l}$ перетинають коло Клейна, то міра кута (h, l) — це число $\theta(h, l) = k|\ln(hl\alpha\beta)|$. $\theta(h, l) = \dfrac{\pi}{2}$, якщо $k = \dfrac{1}{2}$. $(hl\alpha\beta)$ — складне відношення упорядкованої четвірки променів.

93. Якщо α, β і γ — три різні площини проективного простору, то за аксіомою I_3 системи аксіом $(I - III, 15)$ на кожній з площин існує принаймні по одній точці. Нехай точка A належить площині α, B — β і C — γ. Якщо точки A, B і C збігаються, то твердження доведено. Нехай точка A не збігається з точкою B. Тоді існує пряма, яка проходить через точки A і B. Якщо точка C належить прямій AB, то деяка площина δ, яка містить у собі пряму AB, перетинає площину (α) по прямій AB, площину β — по прямій AB, площину γ — по прямій AB. Отже, площини α, β і γ перетинаються по прямій AB. Якщо ж точка C не належить прямій AB, то точки A, B і C попарно різні і не лежать на одній прямій. Тоді за площину δ обираємо площину ABC. Прямі перетину площини ABC з площинами α, β і γ лежать у площині ABC і тому за аксіомою I_9 попарно перетинаються. Кожна спільна точка довільної пари цих прямих є спільною точкою площин α, β і γ.

94. У схемі Ф.Клейна для прямої (a) будуємо полюс B. Пряма AB — перпендикуляр, опущений з точки A на пряму (a), оскільки полюс — точка B — буде зовнішною точкою для круга Клейна.

95. Залежність $\alpha = \pi(x)$, яка є функцією Лобачевського, що виражає кутові величини через лінійні розміри фігур площини Лобачевського, зводить подібні фігури до їх рівності.

96. Транзитивність відношення паралельності для прямих площини Лобачевського очевидна, розглядаючи трійку попарно паралельних прямих a, b і c у крузі Клейна.

Пряма a паралельна прямій b, якщо вони перетинаються у точці A на абсолюті (на колі Клейна). Пряма b паралельна прямій c, якщо у них спільна точка A на абсолюті. Звідси випливає, що пряма a і пряма c також перетинаються у точці A на абсолюті. Тобто пряма a буде паралельною прямій c.

97. Якщо пряма a паралельна прямій b на площині Лобачевського, то у крузі Клейна "хорда"a має з "хордою"b спільну точку A на колі Клейна. Отже, пряма b маючи спільну "невласну"точку A з прямою a, паралельна прямій a.

98. Якщо вірне твердження $\mathfrak{A}$ для точок і площин, виражене в термінах інцидентності та порядку, то вірне твердження $\mathfrak{A}'$, яке отримується з твердження $\mathfrak{A}$ заміною слів "точка— "площина", "площина— "точка". Термін "пряма"залишається без зміни.

99. Оскільки точки площини Рімана — це ототожнені діаметрально протилежні точки сфери, а прямі — це кола великих кругів сфери, то пряма площини Рімана не розбиває її на дві частини.

100. Аксіоми стереометрії навчального посібника "Геометрія"за редакцією О.В.Погорєлова сформульовані у розділі 3 "Системи аксіом геометрії". Сформулюємо деякі наслідки аксіом стереометрії. 1. Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну. 2. Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині. 3. Нехай A, B, C — три дані точки, які не лежать на одній прямій. Проведемо прямі (AB) й (AC). Вони різні, бо точки A, B, C не лежать на одній прямій. За аксіомою C_3 через прямі (AB) і (AC) можна провести площину (α). Ця площина містить точки A, B, C. Доведемо, що площина (α) єдина. Дійсно, площина, яка проходить через точки A, B, C містить прямі (AB) і (AC). Ці прямі різні і мають спільну точку A. Тому за аксіомою C_3 ця площина єдина.

101. Оскільки пряма (AB) перетинає відрізок CD, то точки C і D лежать у різних півплощинах, на які пряма (AB) розбиває дану площину. Нехай M — точка перетину прямої (AB) з відрізком CD. Тоді точка M лежить між точками C і D. Точка M належить прямій (AB) і прямій (CD), оскільки вона належить відрізку CD прямої (CD). За умовою, пряма (CD) перетинає відрізок AB, тому точки A і B знаходяться у різних півплощинах даної площини відносно прямої (CD). Отже, точка M є спільною точкою відрізків AB і CD. Інших спільних точок ці відрізки не мають, інакше вони були б відрізками однієї прямої і тоді точки A, B, C і D належали б одній прямій.

102. Застосуйте твердження Паша для трикутника AA_1C та прямої (BB_1).

103. Допустимо, що пряма (BD) перетинає пряму AC. Тоді або точка B збігається з точкою E, що неможливо, або пряма BD перетинає відрізок AE або відрізок CE. Це теж неможливо, бо у першому випадку це означає, що B між A і E на прямій (AB), а у другому, що точка D лежить між C і E на прямій (CD). За умовою E лежить між A і B і точка E лежить між C і D.

104. Нехай (h, k) — кут, сторонами якого є промені h і k має величину 2α, а $(\bar{h}, \bar{k})$ — вертикальний йому кут, сторонами якого є доповняльні промені $\bar{h}$ і $\bar{k}$. Якщо промінь l є бісектрисою кута (h, k), то $(h, l) = (l, k) = \alpha$ і $(\bar{h}, \bar{m}) = (\bar{m}, \bar{k}) = \alpha$, де $\bar{m}$ — бісектриса вертикального кута $(\bar{h}, \bar{k})$. Величина спільного суміжного кута $(h, \bar{k})$ дорівнює $180^0 - 2\alpha$. Тоді величина кута $(l, \bar{m})$ дорівнює $\alpha + 180^0 - 2\alpha + \alpha = 180^0$. Отже, $\bar{m} = \bar{l}$ — цей промінь є доповняльним для бісектриси l. Бісектриси l і $\bar{l}$ є взаємно доповняльними променями однієї прямої.

105. Вибравши довільні точки M і N на сторонах кута так, щоб A і M належали одній стороні кута, а B і N — іншій стороні кута, застосуйте твердження Паша для $\triangle BMN$ і променя, який виходить з вершини кута.

106. Нехай рівні кути $\triangle ABC$ прилеглі до сторони AC. Бісектриса BK є висотою $\triangle ABC$, оскільки $\angle AKB = \angle CKB$ і вони суміжні. $\triangle AKB = \triangle CKB$ за стороною BK (спільною) і рівними прилеглими до неї кутами. У рівних трикутників проти рівних прямих кутів лежать рівні сторони. Тому $AB = CB$ і $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

107. У рівнобедреному $\triangle ABC$ з основою AB бісектриси AL і BK рівні як сторони у рівних трикутників ABL і BAK, що лежать проти рівних кутів з вершинами A і B. $\triangle ABL = \triangle BAK$ за спільною стороною і рівними прилеглими кутами.

108. Нехай у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, бісектриси AK і A_1K_1 — рівні і $AC = A_1C_1$. Тоді $\triangle AKC = \triangle A_1K_1C_1$ за двома сторонами і кутом між ними. Отже,

$\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за спільною стороною $AC = A_1C_1$ і прилеглими до неї кутами.

109. Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$. Якщо K — середина AC, K_1 — середина A_1C_1, то $\triangle ABK = \triangle A_1B_1K_1$ за трьома сторонами. Тоді $\angle BAK = \angle B_1A_1K_1$ і $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за двома сторонами і кутом між ними.

110. Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$. Якщо K — середина BC і K_1 — середина B_1C_1, то за умовою $AK = A_1K_1$.

Продовжимо відрізок AK на KD ($KD = AK$) і відрізок A_1K_1 на K_1D_1 ($K_1D_1 = A_1K_1$) і з'єднаємо точки D з C та D_1 з C_1. $\triangle ABK = \triangle CDK$ і $\triangle A_1B_1K_1 = \triangle C_1D_1K_1$. Нехай $\angle BAK = \beta$, $\angle KAC = \alpha$. Тоді за умовою $\angle B_1A_1K_1 = \beta$, $\angle K_1A_1C_1 = \alpha$.

Оскільки $\triangle ABK = \triangle CDK$, то $\angle ABC = \angle DCK$. Оскільки $\triangle A_1B_1K_1 = \triangle C_1D_1K_1$, то $\angle A_1B_1K_1 = \angle D_1C_1K_1$. $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1 = \beta$. $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ за стороною $AD = A_1D_1$ і рівними прилеглими до неї кутами. Отже, $\angle DCA = \angle D_1C_1A_1$. Тому $AC = A_1C_1$ і $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників.

111. Нехай A спільна точка різних прямих (a) і (b) і деяка пряма (c) перетинає пряму (b) у точці B, а пряму (a) у точці C. Точки A, B і C — різні і не лежать на одній прямій. Згідно з аксіомами зв'язку через точки A, B і C проходить єдина площина (ABC). Ця площина містить прямі (a), (b) і (c), оскільки, якщо площина має дві спільні точки з прямою, то всі точки цієї прямої належать площині.

112. Нехай точка B не належить прямій (a), а деяка пряма (b) проходить через точку B і перетинає пряму (a) у точці A. Оскільки точки A і B різні, то прямі (a) і (b) теж різні і перетинаються. За аксіомою C_3 існує площина, яка містить прямі (a) і (b). Висновок вірний для довільної прямої (b), яка проходить через точку B і перетинає пряму (a). Якщо якась інша пряма, що проходить через точку B і перетинає пряму (a) у точці C, то точки A, B і C не лежать на одній прямій, різні і тому визначають єдину площину (ABC). Очевидно, що площина (ABC) співпадає з площиною, яка містить прямі (a) і (b).

113. Нехай пряма (c) перетинає паралельні прямі (a) і (b) у точках A і B відповідно. Точки A і B — різні. Тому прямі (a) і (c) — різні і перетинаються, а також прямі (b) і (c) — різні і перетинаються. Згідно з аксіомою C_3, існують такі площини: (α), яка містить прямі (a) і (c) та (β), яка містить прямі (b) і (c). Якщо (γ) — площина, в якій лежать паралельні прямі (a) і (b), то площини (α) і (γ) збігаються і тому (α) співпадає з (β).

114. Ні, бо якби така пряма (c) існувала, щоб $(a)\|(c)$ і $(b)\|(c)$, то тоді пряма (a) була би паралельною до прямої (b). Тоді прямі (a) і (b) належали б одній площині, а це суперечить умові задачі.

115. Через дану точку потрібно провести єдину пряму паралельно прямій перетину даних площин. За аксіомою Евкліда така пряма належить площині, що визначається даною точкою і прямою перетину заданих площин.

116. Нехай точка A не лежить у площині (α). Проведемо через неї дві різні прямі (a) і (b) паралельно площині (α). Оскільки прямі (a) і (b) перетинаються, то за аксіомою C_3 існує єдина площина (β), яка їх містить. Площини (α) і (β) паралельні, бо $(a)\|(\alpha)$ і тому у площині (α) існує пряма $(a')\|(a)$. Аналогічно, $(b)\|(\alpha)$ і тому у площині (α) існує пряма $(b')\|(b)$. Оскільки прямі (a) і (b) перетинаються, то і паралельні їм прямі (a') і (b') у площині (α) перетинаються. Тоді за ознакою паралельності, площини (α) і (β) паралельні. Тому кожна пряма, яка належить площині (β), буде паралельною площині (α). Серед них цією ж властивістю володіють усі ті прямі площини (β), які проходять через точку A.

117. Якщо площина (α) містить середину C відрізка AB і A_1 та B_1 — основи перпендикулярів, опущених, відповідно, з точок A і B на площину (α), то існує площина (β), яка містить точки A, A_1, B, B_1. Площина (β) перетинає площину (α) по прямій (A_1B_1), яка містить середину C відрізка AB. Із прямокутних трикутників AA_1C та BB_1C, які рівні, бо $AC = CB$ — рівні похилі, а $A_1C = B_1C$ — рівні їх проекції на площину (α), за наслідком теореми Піфагора маємо, що $AA_1 = BB_1$.

118. Допустимо, що через точку A, яка не лежить у площині (α), проходить дві різні прямі (AB) і (AC), кожна з яких перпендикулярна до площини (α) і перетинає її, відповідно, у точках B і C. Точки A, B і C не лежать на одній прямій і тому існує єдина площина (ABC), яка їх містить. Оскільки (AB) і (AC) перпендикулярні до площини (α), то обидві ці прямі перпендикулярні прямій (BC), яка є спільною прямою площин (α) і (ABC). У $\triangle ABC$ площини (ABC) два внутрішні кути — прямі, а це суперечить аксіомі Евкліда, точніше, її еквіваленту — твердженню про суму внутрішніх кутів довільного трикутника.

119. Якщо пряма (a) не перпендикулярна до площини (α) і має з нею єдину спільну точку, то єдина шукана площина — та, що проходить через пряму (a) і перпендикуляр, проведений через будь-яку точку прямої (a) до площини (α). Цей перпендикуляр не співпалає з прямою (a) і тому за аксіомою C_3 така площина існує. Якщо ж пряма (a) перпендикулярна до площини (α), то будь-яка площина, яка проходить через пряму (a), буде, згідно з ознакою перпендикулярності площин, перпендикулярною до площини (α). Якщо ж пряма (a) належить площині (α) або паралельна до неї, то у першому випадку, встановивши перпендикуляр до (α) у деякій точці прямої (a), отримуємо площину (яка містить пряму (a) і побудований до площини (α) перпендикуляр) — шукану; а у другому випадку з довільної точки прямої (a) опускаємо перпендикуляр на площину (α). Він разом з прямою (a) за аксіомою C_3 однозначно визначає шукану площину.

120. Очевидно, що задача втрачає зміст, якщо пряма (a) перпендикулярна до площини (α). У всіх інших випадках нехай пряма (b) перпендикулярна до площини (α) і перетинає пряму (a) у точці B. Тоді прямі (a) і (b) різні, вони перетинаються у точці B. Тому за аксіомою C_3 існує єдина площина (β), яка містить обидві ці прямі. Якщо (c) — довільна пряма, яка перпендикулярна до площини (α) і перетинає пряму (a) у точці C, то вона паралельна до прямої (b). Площина, яка містить паралельні прямі (b) і (c), збігається з площиною (β). Тому всі прямі, які перпендикулярні до площини (α) і перетинають пряму (a), лежить в одній площині.

ЗМІСТ